

中国地质大学（北京）
2008 年硕士研究生入学考试试题

试题名称： 高等数学

试题代码： 610

提示：所有答案必须写在答题纸上，写在本试卷上及草稿纸上无效！！

一、单选题（本题共 6 小题，每题 3 分，共 18 分）

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ -x^2 & , x > 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] = (\quad)$

- A. 0 B. $-x^2$ C. $f(x)$ D. $g(x)$

2. 设 $x \rightarrow 0$ 时与 $\sqrt[3]{1 - \cos 4x^2}$ 等价的无穷小量为 ax^b , 则常数 a, b 为 ()

- A. $a=1, b=\frac{4}{3}$ B. $a=1, b=\frac{3}{4}$ C. $a=2, b=\frac{4}{3}$ D. $a=2, b=\frac{3}{4}$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{2 + e^{\frac{1}{x}}} & x > 0 \end{cases}$, 则间断点 $x=0$ 的类型是 ()

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 振荡间断点 D. 无穷间断点

4. 设 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)=0$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ()

- A. 不连续 B. 连续但不可导
C. 可导但 $f'(a) \neq 0$ D. 可导且 $f'(a) = 0$

5. 设 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点, 则 ()

- A. x_0 必为极大值点 B. 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, $f'(x_0) = 0$
C. 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, $f''(x_0) < 0$ D. 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, x_0 必为极大值点

6. 设 f 有一阶连续导数, $I = \int_0^{\pi} f(\cos x) \cos x dx - \int_0^{\pi} f'(\cos x) \sin^2 x dx$, 则 $I = ()$

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

二、填空题 (本题共 6 小题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \ln n}{n - \ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x \left(\int_t^2 e^{-u^2} du \right) dt}{\sin^2(x-2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设函数 $x = x(y)$ 由 $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2} (1 + \ln t) \\ y = \frac{1}{t} (3 + 2 \ln t) \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{d^2 x}{dy^2} \right|_{y=3} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\int \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\sin x \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设有曲线 $y = e^x$, 过原点作其切线, 则由此曲线、曲线的切线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 有特解 $y = \frac{x}{\ln|x|}$, 则 $\varphi(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题 (本题共 7 小题, 每题 6 分, 共 42 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{1}{x} [\ln x - \ln(x^2 + x)] & x > 0 \end{cases}$, 问 a, b 取何值时, $f(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 内连续.

2. 设有一横断面为等边三角形 (一顶点向下) 的水槽, 其水槽口保持水平, 若以每分钟 4 立方米的速率向其中注水, 已知此水槽长 12 米, 问当水深为 1.5 米时, 水面上升的速率是多少?

3. 设 $f(x) = \sqrt[4]{x} \sqrt[3]{e^x} \sqrt{\sin \frac{1}{x}} + (ch 2x)^x$, 求 $f'(x)$.

4. 计算 $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$.

5. 设 $y = e^{ax} \cos bx$ (a, b 为常数), 求 $y^{(n)}$.

6. 求微分方程 $(x \cos y + \sin 2y) y' = 1$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

7. 求曲线 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的全长.

四. (12 分) 求函数 $y = x e^{-\frac{1}{4}x^2}$ 的单调区间、极值及其图形的拐点.

五. (10 分) 将一半径为 3 厘米的铁球轻轻地放进一个充满水的正圆锥杯内, 在使球刚好能完全淹没于水中的各种正圆锥中, 求其体积最小者的高度及最小体积.

六. (12 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$ 的通解.

七. (12 分) 设一曲线位于直角坐标系中的 x 轴上方且为凸的, 其上任一点处的曲率半径等于该点处法线在曲线与 x 轴间的长度, 又曲线在 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行, 求该曲线方程.

八. (10 分) 设正方形四个顶点的坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 和 $(1, 1)$, 曲线 $a^2 y = x^2$ ($0 < a < 1$) 将正方形分为二部分, 其中曲线以左的部分记为 D_1 , 曲线以右的部分记为 D_2 , D_1 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积记为 V_1 , D_2 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积记为 V_2 , 确定 a 使 $V_1 = V_2$.

九. (10 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有三阶连续导数, 证明存在实数 $\xi \in (-1, 1)$, 使

得 $\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0)$.