download.kaoyan.com

中央民族大学 2005 年
招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目：455 高等代数

（答案请写在答题纸上，写在试卷上无效）

一（20分）分别给出下列概念的定义（每小题4分）

1. 矩阵的秩；2. 齐次线性方程组的基础解系；

3. 线性空间的维数、基及坐标；4. 特征值与特征向量

5. 正交变换

二（40分）试判断下列命题是否正确，并说明理由（每小题8分）

1. 以一次多项式 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$ 所得余式等于函数值 $f(a)$；

2. 如果 n 级矩阵 A、B 都可逆，则 A+B 也可逆；

3. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s\geq 3)$ 两两线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关；

4. n 维向量集合 $V=\{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1+\cdots+a_n=1\}$ 按数域 P 上 n 维向量的加法和数与向量的乘法不作成线性空间；

5. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，则 σ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

三.（10分）如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，证明，表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

四.（10分）证明，如果矩阵 A 是可逆对称的，则 A^{-1} 也对称.

download.kaoyan.com

五(10分) 如果A可逆，证明：AB与BA相似。

六(10分). 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 是否正定？并说明理由.

七.(20分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是 P^4 的两组基.

其中 $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)$;

$\eta_1=(2,1,0,1)$, $\eta_2=(0,1,2,2)$, $\eta_3=(-2,1,2,1)$, $\eta_4=(1,3,1,2)$.

(1) 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\xi=(1,1,1,1)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标。

八.(30分) 如果线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

(1)(10分) 求出 σ 的全部特征值；(2)(10分) 求出属于各个特征值的全部特征向量；(3)(10分) 求出一个正交矩阵T使 $T'AT$ 成对角形。