中央民族大学 2005 年
招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目：340 数学分析

（答案请写在答题纸上，写在试卷上无效）

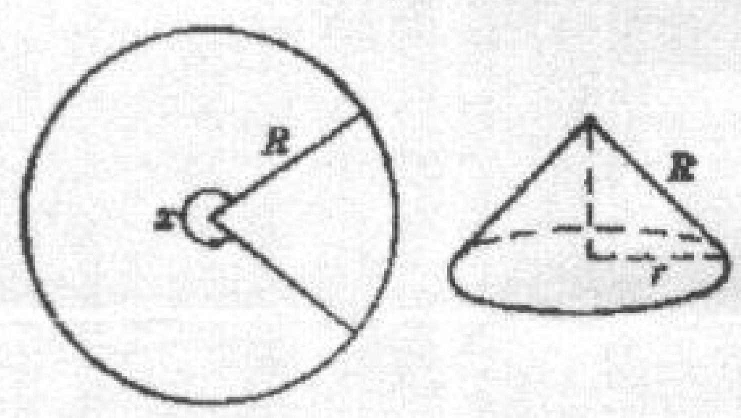
一．(10 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

二．(15 分) 设 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 都是常数，而且 $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\dfrac{c_2}{3}+\cdots+\dfrac{c_n}{n+1}=0$. 试证明方程

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$$

在区间 (0，1) 内至少有一个根.

三．(20 分) 从半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形(如下图所示)，将剩余部分围成一个圆锥形漏斗.问剪去的扇形的圆心角多大时，可以使圆锥形漏斗的容积最大？



四．(15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续、非负，且 $\exists x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)>0$. 试证明

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

五．(10 分) 求旋轮线：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0,\ 0\le t\le 2\pi)$ 一拱与 x 轴围成区域的面积.

六．(25 分) 设函数 $f(x)$ 存在二阶导数，函数 $F(z)$ 存在连续导数. 求证：函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

是弦振动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解.

七．(25 分) 求半径为 a 的球面的面积.

八．(30 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调上升[即当 $a\le x_1<x_2\le b$ 时，有 $f(x_1)\le f(x_2)$]，但未必连续. 已知有 $f(a)\ge a$，$f(b)\le b$. 求证：必存在 $x_0\in[a,b]$ 满足条件 $f(x_0)=x_0$.