1998 年北京邮电大学高等代数考研试题

一．（10分） 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\4&5&0&0\\0&0&6&1\\0&0&4&2\end{pmatrix}$$

求 $AB-BA$，A^{-1}

二．（10分） 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，证明：由 V 的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的。

三．（10分） 设 A，B 都是 n 阶半正定矩阵，试问：$A+B$，AB 是半正定矩阵吗？为什么？

四．（10分） 设 A 为实 n 阶对称矩阵，且 $A^2=E_n$（E_n 为 n 阶单位矩阵），证明：存在正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&-E_{n-r}\end{pmatrix}$。

五．（10分） 证明：次数大于0，且最高次项系数

为1的多项式$f(x)$，是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意的多项式$g(x)$，必有$(f(x),g(x))=1$或者对某一正整数m，$f(x)|g^m(x)$

六．（10分）试问λ取什么值时，下面线性方程组有解，并求出解．

$$\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3=0 \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

七．（10分） 在欧氏空间中，保持任意两个非零向量夹角不变的线性变换是否一定是正交变换？为什么？

八、（10分）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

求A^{200}

九．（10分） 设可逆矩阵A是行等和阵（A中各行元素之和都相等的矩阵），证明：A^{-1}也是行等和阵．

十．（10分） 证明：若A是秩为r的n阶幂等矩阵（$A^2=A$），则A相似于$D=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$