1999年北京邮电大学概率论考研试题

1. 设r.v ξ具有对称的分布密度$f(x)$，即$f(x)=f(-x)$，试证对任意的$a>0$，有

(1) $F(-a)=1-F(a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

此处$F(x)$是ξ的分布函数

(2) $P(|\xi|<a)=2F(a)-1$ (15分)

2. 设$\xi_1,\cdots,\xi_{n+1}$相互独立，并且均服从伯努利分布，即$P(\xi_i=1)=p$，$P(\xi_i=0)=1-p$。令

$$\eta_i=\begin{cases}0, & 若\ \xi_i+\xi_{i+1}\ 是偶数\\ 1, & 若\ \xi_i+\xi_{i+1}\ 是奇数\end{cases}$$

记$\eta=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$，求$E\eta$、$D\eta$ (15分)

3. 设某项比赛共有8个组参加，由各次胜方再组成比赛组，且这种比赛组由上次胜方用抽签法组成。试求其中某两个指定组在某一次比赛中相遇的概率。又假定这8个组实力不相上下，各次比赛胜负是独立的，并不作决定第三名的竞赛。 (15分)

4. 试证，对于每个$\alpha\in(0,2]$，$\varphi_\alpha(t)=e^{-|t|^\alpha}$是某r.v相应的特征函数。 (15分)

5. 设 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 与 $\{Y_m, m=0,1,\cdots\}$ 是两列 r.v. $E|X_n|^2<\infty$, $E|Y_m|^2<\infty$，且存在 r.v X, Y 使有

$$E|X_n-X|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\quad E|Y_m-Y|^2\xrightarrow[m\to\infty]{}0$$ (15分)

试证：$|EX_nY_m-EXY|\longrightarrow 0\quad(n\to\infty, m\to\infty)$

6. 设 $\{\xi_n\}$ 是相互独立 r.v 列，且

$$P(\xi_k=\pm\sqrt{k})=\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{3}},\quad P(\xi_k=\pm1)=\frac{1}{2}(1-k^{-\frac{1}{3}})$$

试问 $\{\xi_n\}$ 是否满足中心极限定理。 (15分)

7. 设对某一 $n\geq1$, $\{X_i, 1\leq i\leq n\}$ 是独立的，试证对每一 $\varepsilon>0$, 有 $P\{\max\limits_{k\leq n}[S_k+\mu(S_n-S_k)]\geq\varepsilon\}\leq P(S_n\geq\varepsilon)$ (10分)

此处 $\mu(X)$ 表示 r.v X 的众数，即有

$$P[X\geq\mu(X)]\geq\frac{1}{2}\quad 同时\quad P[X\leq\mu(X)]\geq\frac{1}{2}。$$

又 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$, $k=\overline{1,n}$。