1999年北京邮电大学高等代数考研试题

一.（10分）判断下列多项式在有理数域上是否不可约：

(1) $x^3-6x^2+16x-14$

(2) $x^4+4x^3+6x^2+4x+8$

二.（10分）求解矩阵方程 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&1&0&\cdots&0&0\\0&1&2&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}$$

三.（10分）设 A，B 都是 n 级方阵，T 为可逆矩阵，使得 $B=T'AT$，则称 A 与 B 是合同的.

证明：若 A 是对称矩阵，则

(1) 与 A 合同的任一矩阵 B 必是对称矩阵；

(2) 必存在可逆矩阵 Q 使得 $Q'AQ$ 为对角矩阵.

四.（10分）设 A 和 B 都是 n 级正交矩阵，且 $|A|=-|B|$，求证 $|A+B|=0$

五.（10分） 设α与β分别是矩阵A的属于λ_1与λ_2的特征向量，而且$\lambda_1 \neq \lambda_2$，试问$\alpha+\beta$可能是A的特征向量吗？为什么？

六.（10分） 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交组，证明：对任意$\xi \in V$以下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{m} (\xi, \alpha_i)^2 \leq |\xi|^2.$$

七.（10分） 试问下面矩阵C是否相似对角矩阵，如果相似对角矩阵，求出可逆矩阵T使$T^{-1}CT$为对角矩阵：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

八.（10分） 设A是线性空间V中的线性变换，且$A^2=A$，证明：$A+E$为可逆线性变换，其中E为V中的恒等变换。

九．（10分） 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，试问$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$，$\cdots$，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$ $(r>1)$也是$AX=0$的基础解系吗？为什么？

十．（10分） 设a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$是$mn$个实数，

$$D=\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{mk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{mk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2 \end{vmatrix}$$

证明：

(1) $D \geqslant 0$

(2) 如果$m=n$且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则$D>0$