北京化工大学
2002年攻读硕士学位研究生入学考试
高等数学试题

注意事项：

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、填空题（本题共15分，每小题3分）

1、 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x-1} =$ ________。

2、 设 $y=f(x)$ 由方程 $2^{x+y}+\cos(xy^2)-2^x=1$ 决定，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 点的切线方程为________。

3、 定积分 $\int_1^{\sqrt{e}} x^3\ln x dx =$ ________。

4、 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则

$$\frac{d}{dx}\int_0^{3x} f(t)dt = \underline{\qquad\qquad}。$$

5、 设 E 为三级单位矩阵，$\alpha=[1,0,1]^T$ 为三维列向量 $B=E-\frac{1}{4}\alpha\alpha^T$，$C=E+\frac{1}{2}\alpha\alpha^T$，则 BC=________。

二、计算题（本题共24 分，每小题8分）

1、 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=1$ 上求出平行于 Oxy 平面的切平面的切点坐标和法线方程。

2、 求 $z=\cos x\cos y$， $z=0$，$|x+y|\le\frac{\pi}{2}$ 与 $|x-y|\le\frac{\pi}{2}$ 所包围图形的体积。

3、 求表面积为 a^2 而体积最大的长方体的边长和体积。

三、常微分方程（本题共 14 分，每小题 7 分）

1、 求常微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解。

2、 求常微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+2}=(x+2)^{\frac{5}{2}}$ 的通解 。

四、 解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）

1、 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b+\sin x^2, & x\le 0, \\ \ln(1+x), & x>0. \end{cases}$

问常数 a， b 为何值时， $f(x)$ 连续且可导？若 $f(x)$ 可导，求出 $f(x)$ 的导函数。

2、 设函数 $y=f(x)$ 是周期为 3 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$f(1+x)-2f(1-x)=4x+\alpha(x)$，

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小。又设在 $x=1$ 点处可导。求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(4,f(4))$ 的切线方程。

五、证明题（本题共 16 分，每小题 8 分）

1、 证明 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$ 。

2、 证明：1） 对任何 $x>0$, 存在 $\theta(x)$ 使得 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}$。

2） $\theta(x)$ 满足：$\frac{1}{4}\le\theta(x)\le\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)=\frac{1}{4}$ ， $\lim\limits_{x\to +\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$

六、线性代数（本题共 17 分）

1、设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+\lambda x_2+2x_3=1 \\ \lambda x_1+(2\lambda+1)x_2+(\lambda+3)x_3=1 \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=1 \end{cases}$ 。

问参数 λ 为何值时：

1）方程组有唯一解？解是什么？

2）方程组无解？

3）方程组有无数多组解？此时求出通解。

（本小题 8 分）

2、设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$。

1）若 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求 X，其中 A^* 为 A 的伴随阵；

2）求可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵；

（本小题 9 分）