北京化工大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试

数学试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色或铅笔均不给分。

一、填空题(本题共5小题，每小题3分，满分15分)

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ (e^2)。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\right)=$ ($\frac{1}{2}$)。

3. 极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=$ ($2\cos x_0$

4. 函数$y=\ln x$ 在$x=3$ 的微分是($\frac{1}{3}dx$

5. 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. 如果$A=\alpha\beta^T$, 则$A^n=$ ($2^{n-1}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}$) 其中T表示矩阵转置。

二、选择题。(本题共5小题，每小题3分，满分15分)

1. 设$x\to 0$时$e^{\sin x}-e^x$ 与x^n 为同阶无穷小，则$n=$ (C)。

 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

2. 已知$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在原点有一阶导数，则(D)。

 (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) ≥ 2.

3. 已知函数$y=y(x)$在任一点x处的增量$\Delta y=\frac{y^2\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}+a$，其中$a$ 是比$\Delta x(\Delta x\to 0)$高阶无穷小，且$y(0)=\frac{1}{\pi}$，则$y(1)=$ (A)。

 (A) $\frac{2}{\pi}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\frac{1}{\pi}$. (D) $\frac{4}{\pi}$.

4. $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt=$ (C)。

 (A) $\sin x$. (B) $\sin|x|$. (C) $2x\sin|x|$. (D) $2x\sin x$.

5. 设向量组$\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(1,-2,3,-1),\alpha_3=(2,0,t,0)$ 的秩为2，则$t=$ (B)。

 (A) -2. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

三、(本题满分10分)

求$y = x\ln(e^2+\frac{1}{x})$ $(x>0)$的渐近线方程。

四、(本题满分15分)

设$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n=1,2,\ldots$. 证明$\{a_n\}$ 收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

五、(本题满分15分)

设函数$f(x)$ 对一切x满足$xf''(x)+3x(f'(x))^2=1-e^x$. 若$f(x)$在原点有极值，问是极大值还是极小值？要求说明理由。

六、(本题满分15分)

求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$的n阶导数和n 阶带拉格朗日(Lagrange)型余项的马克劳林(Maclaurin)公式($n>3$).

七、(本题满分15分)

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$, 且满足方程

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+e^x}\int_0^x e^t f(t)dt=0.$$

1) 求$f'(x)$ 的表达式;

2) 证明不等式$f(x)\le 1$.

八、(本题满分15分)

已知曲线$y=y(x)$在每一点的切线斜率$k(x)$满足

$$xk(x)-2y-x^4=0.$$

且该曲线与直线$x=0, x=1$ 及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周的旋转体体积最小，求该曲线的表达式。

九、(本题满分15分)

已知$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解为$y=e^{2x}+(1+x)e^x$. 求a,b,c的值及此方程的通解.

十、(本题满分10分)

参数λ为何值时，方程组$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=0\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解。

十一、(本题满分10分)

设矩阵A,B满足$AB=A+2B$. 若$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$. 求$B$.