北京化工大学

2003 年攻读硕士学位研究生入学考试

数学分析　　试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。把所选项前的字母写在答题纸上相应题号后。）

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则：

（A） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段连续。

（B） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调。

（C） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

（D） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

2. 设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导且为严格（下）凸函数，则：

（A） 在 I 上 $f''(x)>0$。

（B） $f'(x)$ 为 I 上的严格增函数。

（C） $f(x)$ 在 I 上严格单调上升。

（D） 在 I 上 $f''(x)<0$。

3. 下列结论不正确的是：

（A） 有界数列必有收敛子列。

（B） $\{a_n\}$ 收敛的充要条件为 $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n-1}\}$ 均收敛。

（C） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值。

（D）设 H 为 $[0,1]$ 的一个开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间覆盖 $[0,1]$。

4. 下列结论不正确的是：

（A） 点列 $(x_n,y_n)\to(a,b)$ 的充要条件是 $x_n\to a, y_n\to b\,(n\to+\infty)$。

（B） 若 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=1$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to b}}f(x,y)$ 存在且等于 1。

（C）若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx。$$

（D）若在区间 I 上 $|u_n(x)|\le M_n\ (n=1,2,\cdots)$，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

5. 下列结论正确的是：

（A）若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 也收敛。

（B）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

（C）设 V 为单位球体，S 为单位球面，外侧为正侧。若 $P(x,y,z)$ 在 V 上（含 S）连续可微，则 $\iiint\limits_V\dfrac{\partial P}{\partial x}dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz$。

（D）若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$ 也发散。

6. 设 P= $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$，则 P=

（A）1 ；　（B）$e^{\frac{1}{2}}$ ；　（C）e^{-1} ；　（D）$e^{-\frac{1}{2}}$ ；

7. 设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f^{(100)}(0)=$

（A）9900 ；　（B）0 ；　（C）2 ；　（D）100；

8. 设 S 为悬链线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 那一段的弧长，则 S=

（A）e ；　（B）$\dfrac{e+e^{-1}}{2}$ ；　（C）$\dfrac{e-e^{-1}}{2}$ ；　（D）e^{-1} ；

9. 设 P= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\int_x^1\dfrac{\sin xy}{y}dy}$，则 P=

（A）1 ；　（B）-1 ；　（C）2 ；　（D）-2 ；

10. 设 P= $\iint\limits_{x^2+4y^2\le 4} \sqrt{4-x^2-4y^2}\,dxdy$，则 P=

（A）$\frac{4}{3}\pi$ ；（B）$\frac{8}{3}\pi$ ；（C）2π ；（D）$\frac{2}{3}\pi$ ；

11. 设 P= $\int_L y^2 x\mathrm{d}x + x^2 y\mathrm{d}y$，其中 L 为旋轮线：$x = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi, 2)$ 部分，则 P=

（A）$2\pi^2$ ；（B）0 ；（C）π^2 ；（D）$4\pi^2$ ；

12. 均匀密度的半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (z \ge 0)$ 的质心坐标为

（A）$(0,0,\frac{3}{8})$ ；（B）$(0,0,\frac{1}{4})$ ；（C）$(0,0,\frac{1}{3})$ ；（D）$(0,0,\frac{1}{2})$ ；

二、（本题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分。）

1. 设函数 $z = f(x,y)$ 由 $x^2 + y^2 + e^z + z = 1$ 所确定，求 $z = f(x,y)$ 在其有定义的范围的最大值和最大值点。

2. 在曲面 $z = xy\ (x>0, y>0)$ 上求一点，使曲面在这点的法线方向与函数 $u = 4x^2 + y^2 - z^2$ 在此点的最快增长方向一致，并求曲面在此点的切平面方程。

3. 设 S 为半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (z \ge 0)$，外侧为正侧，计算 $\iint\limits_S xdydz - 2ydzdx + (z+1)dxdy$。

三、（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，$f(0) = -1$，$f(x) \le f'(x)\ (x \in [0,+\infty))$，证明：$f(x) + e^x \ge 0\ (x \in [0,+\infty))$

四、（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 为是周期为 2π 的周期函数，且具有连续的导数，其 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$，证明：$a_n = o(\frac{1}{n})$

五、（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调，证明：若广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 也收敛。

六、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_c^d (f(t+h)-f(t))dt = f(d)-f(c)$

$(a<c<d<b)$

七、（本题满分 10 分）

若 $|a_n| \le n^{\sqrt{n}} \quad (n=1,2,\cdots)$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \ge 1$。

八、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y,z)$ 具有连续的 n 阶偏导数，a,b,c,h,k,l 为常数，$g(t)=f(a+ht,b+kt,c+lt)$，证明：

$$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(a+ht,b+kt,c+lt)$$