"05.4.13 王春已录入

208

北京化工大学
2004年攻读硕士学位研究生入学考试

数学分析　　试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。把所选项前的字母写在答题纸上相应题号后。）

1. 设$f(x)$在区间(a,b)上可导，在$[a,b]$上连续，则结论不正确的是：✓

（A）$f^2(x)$在(a,b)上一致连续。

（B）至少存在一点$x_0\in(a,b)$，$f(x)$在x_0点二阶可导。

（C）$f(x)$在$[a,b]$上有界。

（D）$|f(x)|$在$[a,b]$上Riemann可积。

2. 若$f(x),g(x)$在$(-1,1)$可导，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}g'(x)=1$，则　B

（A）$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$x=0$点可微。　　（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$。

（C）$h(x)=f(x^3)g(\sin^2x)+f(\dfrac{e^x}{3})$在$(-1,1)$可导。

（D）$x=0$点是$f(x)$的极大值点或极小值点。

3. 下列结论不正确的是：　B

（A）若$x=0$是$f(x)$的拐点，则$f''(0)=0$。

（B）若$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，则$\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-f(-x))$存在。

（C） 如果$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\sup\limits_{x\in[a,b)} f(x)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$。

（D） 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n^2+1}u_{n+3}$ 也收敛。

4. 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，则结论**不正确的**是： A

（A） $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续。

（B） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)存在偏导数f_x和f_y。

（C） $u=f(x,y_0)$作为x的函数在x_0点可微。

（D） $f(x,y)$的偏导数f_x和f_y在点(x_0,y_0)连续。

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则 A

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|}{\sqrt{n}}$收敛。

（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^3$收敛。

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n|u_n|$收敛。

（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{|u_n|}{\sqrt{n}}$收敛。

6. 下列结论**不正确**的是： C

（A） 若f_x, f_y在(x_0,y_0)某邻域存在且在(x_0,y_0)可微，则

$f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$。

（B） $x^2+e^y-y=1$在点$(0,0)$附近能确定唯一的可微函数$y=f(x)$。

（C） 若数列$\{a_n\}$的子列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛，则$\{a_n\}$收敛。

（D） 如果$\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$收敛，则$\int_1^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x}dx$也收敛。

7. 下列结论**不正确**的是： D

（A） 若 $f(x), g(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的偶函数，则 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 也是偶函数。

（B）若 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 连续，则 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 也在 (a,b) 连续。

（C）若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 也在 $[a,b]$ 可积。

（D）若 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 可导，则 $h(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 也在 (a,b) 可导。

8. 下列结论**正确**的是： A

（A） 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A,\ \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=B$ 存在，则 $A=B$。

（B） 若 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上连续。

（C） 如果对 $\forall m\in R$，均有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=A$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$。

（D） 函数列 $\{e^{-nx}\}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛。

二、（本题共 9 小题，每小题 8 分，满分 72 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\int_0^{2x} t^2 e^{-t}\,dt}$

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，使其与圆柱螺旋线：$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t$ 在点 $(0,1,\pi)$ 的法平面平行。

3. 求 $1, \sqrt{2^2}, \sqrt[3]{3^2}, \cdots, \sqrt[2004]{2004^2}$ 中最大的数。

4. 计算 $\iint\limits_S (x+y)\,dydz - z\,dxdy$，其中 S 为椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 的

$z \geq -1$部分，外侧为正侧。

5. 函数 $y=y(x)$ 由 $x+y-e^{x-y}=1$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和极值点。

6. 设D为包含原点在其内的单连通区域，其边界为简单光滑闭曲线l，求$\int_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$。

7. 讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+x^p}$ $(p\geq 0)$的收敛发散性。

8. 求质量密度均匀的球面$x^2+y^2+z^2=1$（$z\geq\frac{1}{2}$部分）的质心坐标。

9. 求$f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$的幂级数展开式，并确定其收敛半径。

三、（本题满分12分）

若$f(x)$在区间$[-1,1]$上有定义，在$[-1,0)$和$(0,1]$上连续，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，证明$f(x)$在$[-1,1]$上有界。

四、（本题满分10分）

设$F(y)=\int_0^{2y}f(x)|y-x|dx$，其中$f(x)$连续，证明$F(y)$可导，并求$F'(y)$。

五、（本题满分16分）

1. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$ 在$(-\pi,\pi)$收敛，对任意$\delta>0$，在$[-\pi+\delta,\pi-\delta]$一致收敛。

2. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}$，证明$f(x)$在$(-\pi,\pi)$连续。

六、（本题满分8分）

设$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$，证明：对任意正数a,b，存在$\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, $(\xi_1\neq\xi_2)$，使得$\frac{a}{f'(\xi_1)}+\frac{b}{f'(\xi_2)}=a+b$。