

05.4.13. 王青 乙201

乙201

56

北京化工大学

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试

高等数学 试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上, 写在试卷上均不给分.
2. 答题时可不抄题, 但必须写清题号.
3. 答题必须用蓝、黑墨水或圆珠笔, 用红色笔或铅笔均不给分.

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分.)

(1) 设曲线的参数方程表达式为 $\begin{cases} x = 3 + e^{-t^2} \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}, -\infty < t < +\infty$

则其垂直与 $y = -x$ 的法线方程为 $y = x + 1$.

(2) 微分方程 $y'' + 2y' = 12x - 10$ 的通解为 _____.

(3) 设 $f(x)$ 有连续导函数, $f'(-1) = 2$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$ 存在,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x)}{\ln(1+x^2)} =$ -1 .

(4) $\int_{-a}^a \frac{2x^2 + x \cos x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} dx =$ $\frac{a^2}{4}\pi$.

(5) 设 A, B 均是 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位阵, 且 $(2AB + E)^{-1} = 2AB + E$, 则 $AB =$ E .

(6) 已知向量组 $\alpha_1 = (a, -a, -b)^T$, $\alpha_2 = (-a, b, a)^T$, $\alpha_3 = (b, a, -b)^T$

线性相关, 则非零常数 a, b 满足的条件是_____.

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。)

(1) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x$ 是与 x^n 同阶的无穷小, 则 n 为

- (A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 4

[C]

(2) 设函数 $F(x) = \int_0^x (2t - x)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0$

在区间 $(-1, 1)$ 成立, 则

(A) $F(x)$ 必在 $x = 0$ 处取得极大值 ✓

(B) $F(x)$ 必在 $x = 0$ 处取得极小值

(C) $F(x)$ 不在 $x = 0$ 处取得极值, 但点 $(0, F(0))$ 是曲线

$y = F(x)$ 的拐点

(D) $F(x)$ 不在 $x = 0$ 处取得极值, 点 $(0, F(0))$ 也不是曲线

$y = F(x)$ 的拐点

[C]

(3) $M = \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2} e^{x^2} dx$, $N = \int_{-1}^1 (\sin^3 x + e^{x^2}) dx$,

$P = \int_{-1}^1 (x \cos x + e^{|x|}) dx$, 则有

(A) $N < P < M$

(B) $M < P < N$

(C) $N < M < P$

(D) $M < N < P$

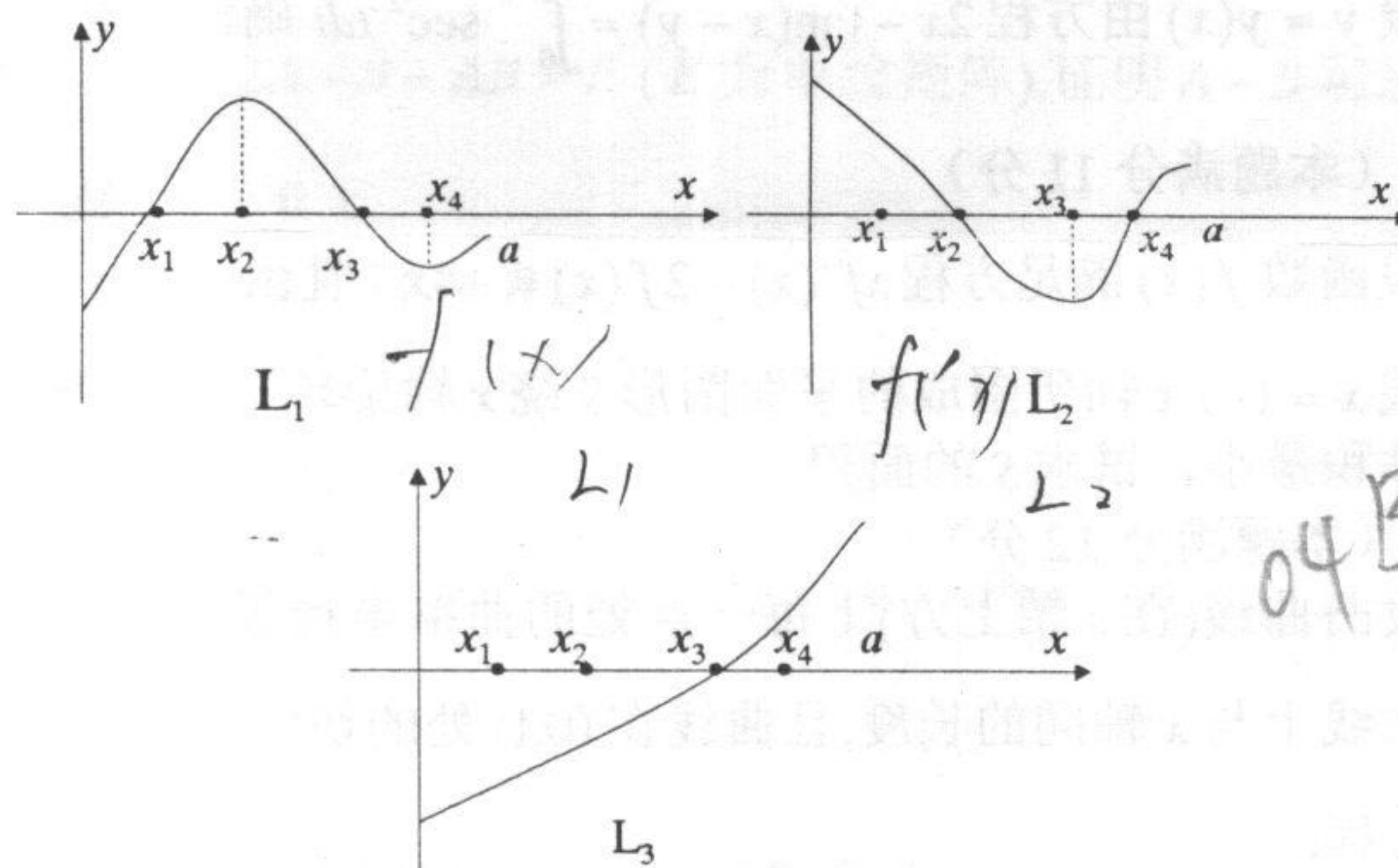
[D]

(4) 设函数 $f(x)$ 可导, 则

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $\int_0^x f(t)dt$ 必是偶函数
- (B) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $f'(x)$ 必是奇函数
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $\int_0^x f(t)dt$ 必是周期函数
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $f'(x)$ 也是单调增函数

[C]

(5) 设 $y = f(x)$, 在 $[0, a]$ 上可导, 从定性上看区间 $[0, a]$ 上, 下列三个图形分别是 $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = \int_0^x f(t)dt$ 的图形是



04BH61

- (A) L_2, L_3, L_1
- (B) L_1, L_3, L_2
- (C) L_1, L_2, L_3
- (D) L_3, L_1, L_2

[C]

(6) A 是 n 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 下列等式错误的是

$$(A) |AA^*| = |A|^n \quad (B) |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$$

$$(C) \|A|A^*\| = |A|^{2n-1} \quad (D) \|A|A^*\| = |A|^n$$

[D]

三、(本题满分 9 分)

$$\text{求 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x + \cos x}{\sin x + 1} dx$$

四、(本题满分 9 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{1 - \cos \sqrt{x}} \right)$$

五、(本题满分 9 分)

$$\text{设 } y = y(x) \text{ 由方程 } 2x - \tan(x - y) = \int_0^{x-y} \sec^2 t dt \text{ 确定, 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1}.$$

六、(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) - 2f(x) = -4x$, 且由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴所围成的平面图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小, 试求 S 的面积.

七、(本题满分 12 分)

设凸曲线(在 x 轴上方)上每一点处的曲率半径等于该点处法线在曲线上与 x 轴间的长度, 且曲线在 $(0,1)$ 处的切线斜率为 0, 求曲线方程.

八、(本题满分 10 分)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} + a & x < 0 \\ \arctan x - e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

(1) a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

(2)求 $f'(x)$,并讨论其连续性.

九、(本题满分 9 分)

就常数 a 的各种可能取值讨论方程 $x^2 = ae^x$ 的实根个数及每个根所在范围.

十、(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = C$ (C 为常数), $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = C$;

(2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

十一、(本题满分 9 分)

已知 $A^2 = A$, $2A - B - AB = E$ (E 为单位矩阵), 证明 $A - B$ 可逆,

当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ 时, 求 B .

十二、(本题满分 12 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$ $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$ $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$

$\beta = (3, 10, b, 4)^T$

(1) a, b 为何值时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出;

(2) a, b 为何值时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 写出表出式.