05.4.13 王春已录入

208

5.

# 北 京 化 工 大 学

## 2004 年攻读硕士学位研究生入学考试

## 高等代数与解析几何试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、选择题 (每小题 4 分，共 24 分)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2$ 为 $n$ 维向量，$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=5\alpha_1+\alpha_2$,则( A )

(A) $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 必线性相关；　(B) $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 必线性无关；

(C) 仅当 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关时, $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关；

(D) 仅当 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性相关时, $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关。

2. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,若 $A^2=A$,则下列命题正确的为 ( )。。

(A) $A$ 的特征值为 1 或-1;　　(B) $A$ 的特征值为 1;

(C) $A$ 的特征值为 0 或 1;　　(D) $A$ 的特征值为 0。

3. 若 $A,B$ 为正定矩阵,则( )。

(A) $AB$, $A+B$ 都正定;　　(B) $AB$ 正定, $A+B$ 非正定;

(C) $AB$ 非正定, $A+B$ 正定;　　(D) $AB$ 不一定正定, $A+B$ 正定。

4. 设三阶方阵 $A$ 的特征值为 1,1,1,则 $A$ 的若当标准形为 ( )。

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$;　　(D) 上述三种之一。

5. 设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 满秩，则

直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$

四、(20 分) 设 $abc \neq 0$，点 $O, A, B, C$ 在直角坐标系下的坐标分别为 $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$。

求 1) 四面体 $OABC$ 的体积；

2) 点 $O$ 到 $A$、$B$、$C$ 所在平面的距离；

3) $\Delta ABC$ 的面积。

五、(16 分) 设 $A$ 是复数矩阵，$A^*$ 是 $A$ 的共轭转置矩阵，即 $A^*$ 的第 $(i, j)$ 元（第 $i$ 行第 $j$ 列元素）等于 $A$ 的第 $(j, i)$ 元的共轭复数。证明 $r(A^*A) = r(A)$，这里 $r(A)$ 为 $A$ 的秩。

六、(20 分) 1) 用正交线性替换把二次型 $xy + yz + zx$ 化为标准形, 并写出所做替换。

2) 设曲面 $\Sigma$ 在直角坐标系 $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ 下的方程为 $xy + yz + zx = \lambda$ ($\lambda$ 为实数),求新的直角坐标系,使 $\Sigma$ 在新坐标系下有标准方程, 并写出标准方程。

3) 判断 $\Sigma$ 是什么曲面。

4) $\Sigma$ 是否有对称中心、对称轴、对称平面? 若有,求出它们在 $[O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ 下的方程。

七、(20 分) 设 $A, B$ 是线性空间 $V$ 中的幂等线性变换, 即 $A^2 = A$, $B^2 = B$。

证明 1) $\ker A = \ker B$ 的充要条件是 $AB = A$ 且 $BA = B$;

2) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ 的充要条件是 $AB = B$ 且 $BA = A$,

其中 $\ker A$, $\operatorname{Im} A$ 表示 $A$ 的核与象(即值域)。

八、(10 分) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是两两互异的整数。

证明 $f(x) = 1 + \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$ 在 $Q[x]$ 中不可约,这里 $Q$ 表示有理数域。