北京化工大学
2005 年攻读硕士学位研究生入学考试

数学分析　　试题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。把所选项前的字母写在答题纸上相应题号后。）

1. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 连续，则

（A） $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 存在。

（B） $h(x)=f(\frac{x}{1+x})$ 在 $(0,+\infty)$ 连续。

（C） 至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，$f'(x_0)$ 存在。

（D） $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有最大值或最小值。

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 (a,b) 上可导，则

（A） $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

（B） 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

（C） $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界。

（D） $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

3. 下列结论正确的是：

（A） 若 $f'(0)=0$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点。

（B） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$。

（C） 若 $\{a_{3n-1}\},\{a_{3n-2}\},\{a_{3n}\}$ 均收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛。

（D） 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(-x)$ 不存在。

4. 若 $f(x,y)$ 在区域 $D=(0,1)\times(0,1)$ 可微，$(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in D$，则结论不正确的是：

（A） $f(x,y)$ 在 D 有界。

（B） 存在 $M\in D$，使得 $f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)=f_x(M)(x_1-x_0)+f_y(M)(y_1-y_0)$。

（C） $h(t)=f(t,t)$ 在 $(0,1)$ 可导。

（D） $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在。

5. 下列结论正确的是：

（A） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛。

（B） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n |u_n|$ 收敛。

（C） 函数列 $\{\frac{nx}{1+nx}\}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛。

（D） 若 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛。

6. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 连续，则结论不正确的是：

（A） 存在 $M\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(M)$。

（B） $I(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$ 在 $[0,1]$ 上连续。

（C） 若 L 是 D 内连接 $(1,1)$ 和 $(0,0)$ 的直线，则存在 $M\in D$，使得 $\int\limits_L f(x,y)\,dx = f(M)$。

（D） $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$。

二、（本题共 8 小题，每小题 10 分，满分 80 分）

1. 求 $\sup\limits_{0<x<+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ 。

2. 求 $f=2x+4y+4z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值及此球面在最值点处的切平面。

3. 设 $f(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$，求 $f(x)$ 的幂级数展开式，并求 $f^{(2005)}(0)$。

4. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在圆柱体 $x^2+y^2\le 1$ 内那部分的面积。

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{n^2}\int_n^{n+1} e^{-t^2}dt$（提示：可利用归结原则）。

6. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cos x+\cos y-2}{x^2+y^2}$

7. 设 $u=x^2+y^2+z$，其中 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3=-3z$ 所确定的隐函数，

求 u_x 和 u_{xy}。

8. 求函数 $f(x)$，使得曲线积分 $k=\int_{(0,0)}^{(1,1)} f(x)e^{x+y}dx+xe^{x+y}dy$ 与路径无关，并求 k 的值。

三、（本题满分 14 分）

若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 二阶可导，$f(-1)=f(1)=0$，$f''(x)\le 0\ (x\in(-1,1))$，证明：

1. $f(x)\ge 0\ (x\in(-1,1))$
2. $f(0)\le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 2f(0)$。

四、（本题满分 10 分）

设 $g(t)=\oint\!\!\oint_{S_t} zf(x,y)dxdy$，其中 S_t 为球面 $x^2+y^2+z^2=t^2\ (t\ge 0)$ 的外侧，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续，证明：$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{g(t)}{t^3}=\dfrac{4\pi}{3}f(0,0)$

五、（本题满分 10 分）

设函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 可积，a_n,b_n 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

六、（本题满分 6 分）

设 $f(x,y)$ 在凸区域 D 上具有二阶连续的偏导数，证明：对任意 $P_0\in D$，曲面 $z=f(x,y)$ 过点 P_0 的切平面当 $(x,y)\in D$ 时总在曲面 $z=f(x,y)$ 的下方的充分必要条件为：对任意 $P\in D$，f 在 P 点的 Hesse 矩阵 $\begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P)\end{bmatrix}$ 半正定。