北 京 科 技 大 学

2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数（共1页）

适用专业：应用数学　系统工程

说　　明：（1）解答必须写在答题纸上，否则一律作废。

（2）E 表示单位阵，A^T 表示矩阵 A 的转置。

（3）共七题，满分150分。

一.（20分）若 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$，求 A,B。

二.（15分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ y & y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$。

三.（15分）是否存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^i x_k=(n+1)^i$，$i=0,1,2,\cdots,n$。给出并证明你的结论。

四.（25分）求正交变换 T，使二次型 $f(x,y,z)=2xy+2yz+2zx$ 化为标准形，并指出正负惯性指数及符号差。

五.（30分）设 $\alpha_1=(1,-1,2,3)$，$\alpha_2=(-1,2,1,-2)$，$\alpha_3=(1,1,8,5)$，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$。

（1）计算：$\dim W$。

（2）求出：$W^{\perp}$。

（3）求出：行向量 β_1,β_2，使得方阵 $(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)$ 可逆，并求其逆矩阵。

六.（30分）考虑实数域 R 上的线性空间 $C_0=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in M_2(R) \middle| a,b\in R\right\}$。

（1）计算：$\dim C_0$，并给出 C_0 的一组基。

（2）建立 C_0 上的变换 τ，$\tau\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$。证明：$\tau$ 是线性变换。

（3）求出：τ 的全部不变子空间。

七.（15分）设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间，且 $\dim V_1<\dim V_2$。证明：存在 V_2 中的非零向量 α，使得 α 与 V_1 正交。