北京科技大学
2004 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析　　　　适用专业：应用数学、计算数学、运筹与学控制论

一、(15 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明：函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty]$ 上一致连续。

二、(15 分)设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减且非负的连续函数，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,L)$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。

三、(15 分)设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=f(0)=f'(1)=f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$

四、(15 分)计算 $\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$。

五、(15 分)证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内一致收敛。

六、(15 分)设 $a_n>0(n=1, 2, L)$，$S_n=a_1+a_2+L+a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛。

七、(15 分)计算积分 $I=\iint\limits_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为平面曲线 $xy=1, xy=3, y^2=x, y^2=3x$ 所围成的有界闭区域.

八、(15 分)计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

九、(15 分)设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数，$f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

十、(15 分)在变力 $F=yzi+xzj+xyk$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$，问当 ξ, η, ζ 取何值时，力 F 所作的功 W 最大？并求出 W 的最大值.