北 京 科 技 大 学
2004年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数　　　　　　　　　　　　　　　　（共 两 页）

适用专业：应用数学、计算数学、运筹学与控制工程

说明：①所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。
　　　②考试用具：不得使用任何电子计算仪器。

一.（15分）计算行列式：$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$。

二.（15分）设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，试计算 A^n。

三.（20分）证明：

（1）若 A,B 都是 n 阶方阵，且 $AB=0$，则 $rankA+rankB\le n$。（$rankA$ 表示矩阵 A 的秩）

（2）若 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2=E$，则 $rank(A+E)+rank(A-E)=n$。

四.（15分）已知：在四维向量空间 V 中 $\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\alpha_2=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},-\frac{5}{6}\right)$，$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$，求 $W^{\perp}$。

五.（20 分）设 $\varepsilon_1=(1,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1)^T$ 是二维向量空间 V 的一组基，$\alpha=(2,3)^T$，$\beta=(-4,9)^T$。σ 是 V 上的一个线性变换，且 $\sigma(\varepsilon_1)=\alpha$，$\sigma(\varepsilon_2)=\beta$。

（1）写出线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 之下的矩阵。

（2）求出线性变换 σ 的逆变换。

（3）求出线性变换 σ 的特征值和特征向量。

（4）求出线性变换 σ 的全部不变子空间。

六.（20分）

（1）若矩阵 A 与矩阵 B 相似，证明：A 与 B 有相同的特征值。

（2）举例说明，上述命题的逆命题不成立。

（3）若 A 与 B 均为对称矩阵，则（1）的逆命题成立。

（续上页）

七.（15分）求一个三次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除。

八.（15分）若 A 是 n 阶方阵，且对任意的非零向量 α，都有 $\alpha^T A\alpha > 0$。证明：存在正定矩阵 B 及反对称矩阵 C，使得 $A=B+C$，并且对任意向量 α，都有 $\alpha^T A\alpha = \alpha^T B\alpha$，$\alpha^T C\alpha = 0$。

九.（15分）如果 σ,τ 都是幂等（$\sigma^2=\sigma$，$\tau^2=\tau$）的线性变换。证明：

（1）如果 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则 $\sigma+\tau-\sigma\tau$ 也是幂等变换。

（2）如果 $\sigma+\tau$ 是幂等变换，则 $\sigma\tau=0$。