北京科技大学
2005年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析－313　　（共2页）

适用专业：应用数学、计算数学、运筹学与控制论

说明：①所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。
②考试用具：钢笔或签字笔

一、(15分) 设

$$x_1>0,\quad x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,\cdots.$$

证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求它的极限.

二、(15分) 设函数$f(x)$在闭区间$[0,\pi]$上连续，在开区间$(0,\pi)$内可导，且

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0,$$

证明：至少存在一点$\xi\in(0,\pi)$，使得$f'(\xi)=0$.

三、(15分) 设$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套，即$\{[a_n,b_n]\}$满足

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

证明：存在唯一一点ξ，使得

$$\xi\in[a_n,b_n],\quad n=1,2,\cdots.$$

四、(15分) 设$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0$（当$x\in(0, 1)$时），试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4.$$

五、(15分) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$收敛，且

$$e^{a_n}=a_n+e^{a_n+b_n}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

证明：级数$\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$收敛.

六、(15分) 证明：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^\infty x^n(1-x)^2$在区间$[0, 1]$上一致收敛.

七、(15 分) 设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，试用变换

$$u=x^2-y^2, v=2xy.$$

将方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

变成关于 u,v 的方程.

八、(15 分) 若 S 为封闭的光滑曲面，$\vec{l}$ 为任意固定的已知方向，证明

$$\oint\!\!\!\oint_S \cos(\vec{n},\vec{l})\mathrm{d}S=0.$$

其中 $\vec{n}$ 为曲面的外法线向量.

九、 (15 分) 计算闭曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$$

所围立体之体积，其中 a,b,c,h 均为正常数.

十、 (15 分) 当 $x>0, y>0, z>0$ 时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z.$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ (r 为正常数)上的最大值. 并证明：当 a,b,c 为正实数时，有

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$