北 京 科 技 大 学

2005年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号： 425　　　试题名称： 高等代数　　　（共 两 页）

适用专业： 应用数学、计算数学、运筹学与控制工程

说明： 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

本试卷共十题，满分 **150** 分。

1.（本题 **10** 分）

计算 n $(n\geq 3)$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \sin(\alpha_1+\alpha_3) & \cdots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \sin(\alpha_2+\alpha_3) & \cdots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_3+\alpha_1) & \sin(\alpha_3+\alpha_2) & \sin 2\alpha_3 & \cdots & \sin(\alpha_3+\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \sin(\alpha_n+\alpha_3) & \cdots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$。

2.（本题 **15** 分）

在 R^4 中，$\alpha=(1,1,-1,1)$，$\beta=(1,-1,-1,1)$，$\gamma=(1,0,-1,1)$，$W=L(\alpha,\beta,\gamma)$。

（**1**）计算向量 α 与向量 β 的长度及夹角；

（**2**）计算向量 α 在向量 β 上的投影；

（**3**）计算 $W^{\perp}$，并给出 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基；

（**4**）求出 $(W^{\perp})^{\perp}$。

3.（本题 **25** 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$。

（**1**）写出这个二次型的矩阵 A；

（**2**）求出矩阵 A 的特征值的和与积；

（**3**）用配方法把这个二次型化为标准形，并写出化标准形所用的变换的矩阵；

（**4**）写出这个二次型的秩、正负惯性指数及符号差；

（**5**）写出这个二次型在实数域和复数域上的规范型。

4.（本题 15 分）
设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解。
证明：它的任意解都可以表示为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$ 的形式，其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$。

5.（本题 15 分）
（1）若 A,B 都是 n 阶方阵，证明：$rankA+rankB\le n+rank(AB)$。
（2）若 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是 n 阶方阵，证明：$\sum_{i=1}^{s}rankA_i\le n(s-1)+rank(A_1A_2\cdots A_s)$。
此处，$rankA$ 表示矩阵 A 的秩。

6.（本题 15 分）
设 A,B 是 n 阶对称矩阵，B 正定。证明：存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 C^TAC 与 C^TBC 都是对角阵。

7.（本题 15 分）
在 R^n 中，记子空间
$W_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$，
$W_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\mid x_1=x_2=\cdots=x_n\}$。
证明：$R^n=W_1\oplus W_2$。

8.（本题 15 分）
设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，σ 是 V 上的一个线性变换。证明：当且仅当 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 线性无关时，σ 是 V 上的可逆变换。

9.（本题 10 分）
求出所有的多项式 $f(x)$，使得 $(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)\equiv 0$。

10.（本题 15 分）
设 σ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换。证明：
（1）$\ker\sigma=\ker\sigma^2$ 的充分必要条件是 $\ker\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{0\}$；
（2）$\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\sigma^2$ 的充分必要条件是 $\ker\sigma+\operatorname{Im}\sigma=V$。