No: 476-1

# 北 京 科 技 大 学
# 2007 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：476　　试题名称：量子力学　　（共 2 页）

适用专业：凝聚态物理、理论物理

说明：所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

---

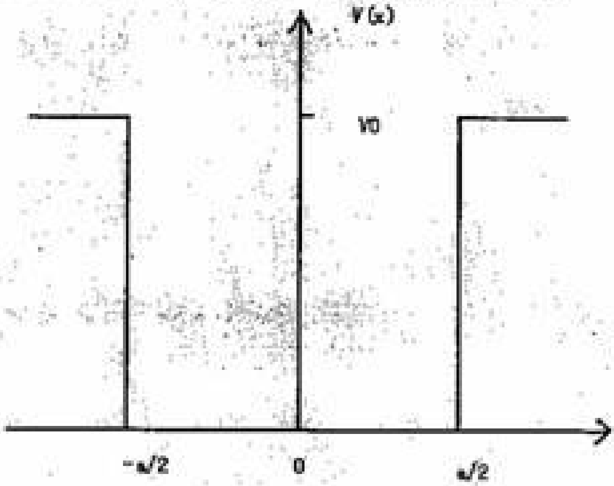
1）算符运算（30 分）：在坐标表象中位置算符：$\hat{x}=x$，动量算符：$\hat{p}_x=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$。

[1]（10 分）计算：$[\hat{x},\hat{p}_x]=?$

[2]（10 分）利用$[\hat{x},\hat{p}_x]$的结果，计算角动量算符对易关系：$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=?$，$[\hat{L}_y,\hat{L}_z]=?$，$[\hat{L}_z,\hat{L}_x]=?$

[3]（10 分）利用$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]$、$[\hat{L}_y,\hat{L}_z]$、$[\hat{L}_z,\hat{L}_x]$的结果，计算$[\hat{L}^2,\hat{L}_z]=?$（$\hat{L}^2=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2$）

2）有限深势阱（30 分）：粒子在如图深度为$V_0$，宽度为$a$的有限深势阱中运动。




[1]（20 分）求当阱口恰好有一个束缚态能级（即：$E\to V_0-0^+$）的条件；

[2]（10 分）不考虑归一化，定性地画出此时波函数的曲线。

3）一维线性谐振子（30 分）：$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$。使用占有数表象，哈密顿可写为：$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$。这里$\hat{a}$是湮灭算符，$\hat{a}^{\dagger}$是产生算符：

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right),\hat{a}^{\dagger}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

[1]（10 分）把位置算符$\hat{x}$，动量算符$\hat{p}$表示为产生算符$\hat{a}^{\dagger}$，湮灭算符$\hat{a}$的形式；

[2]（10 分）考虑一维线性谐振子的基态$|0\rangle$，使用占有数表象求：$\langle\hat{x}\rangle=?$，$\langle\hat{p}\rangle=?$，$\langle\hat{x}^2\rangle=?$，$\langle\hat{p}^2\rangle=?$；

[3]（10 分）使用占有数表象分别对一维线性谐振子的基态和激发态，验证它们都满足海森堡不确定关系$\left\langle(\Delta\hat{x})^2\right\rangle\left\langle(\Delta\hat{p})^2\right\rangle\ge\frac{\hbar^2}{4}$。

4）角动量（30分）：角动量为1（$l=1$），$(\hat{L}^2,\hat{L}_z)$的共同本征函数是：

$$\begin{cases} Y_{11}=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\dfrac{x+iy}{r} \\ Y_{10}=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\dfrac{z}{r} \\ Y_{1-1}=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\dfrac{x-iy}{r} \end{cases}$$

[1]（15分）求$(\hat{L}^2,\hat{L}_x)$的共同本征函数，并把它们表示为$Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}$的线性叠加。

[2]（15分）对于$Y_{10}$，求力学量$\hat{L}_x$的可能测量值及相应概率。

5）自旋—轨道耦合（30分）：考虑在二维电子系统中存在自旋—轨道耦合：$H=H_0+H_{s-o}$。$H_0$是二维自由电子哈密顿量：$\hat{H}_0=\dfrac{\hat{p}_x^2}{2m}+\dfrac{\hat{p}_y^2}{2m}$，假设电子的轨道运动被限制在$x-y$平面内。$H_{s-o}$表示电子自旋运动与轨道运动的耦合：$H_{s-o}=\dfrac{\lambda}{\hbar}\left(\hat{p}_y\hat{\sigma}_x-\hat{p}_x\hat{\sigma}_y\right)$。（泡利矩阵：$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\hat{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$。）

电子波函数可表示为自旋运动波函数与轨道运动波函数的直积形式：$\psi(k,s_z)=\psi(k)\chi(s_z)$。$\psi(k)=\dfrac{1}{\sqrt{A}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}e^{i(k_x x+k_y y)}$（A为二维电子系统的面积），$\chi\left(s_z=\dfrac{\hbar}{2}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\chi\left(s_z=-\dfrac{\hbar}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。

[1]（10分）对哈密顿$\hat{H}_0$求解本征值问题，并说明对$s_z=\pm\dfrac{\hbar}{2}$，能量是简并的。

[2]（20分）对哈密顿$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{s-o}$求解本征值问题，求出本征值及对应本征函数。