北 京 科 技 大 学
2008年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号： 825 试题名称： 高等代数 （共 2 页）

适用专业： 应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计、基础数学

说明： 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。
第一、二大题不必抄题，写清题号即可。

一、单项选择题（本题20分，每小题4分）

1. 设5阶矩阵A的秩为3，那么其伴随矩阵A^*的秩为________。
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

2. 设A为$m\times n$实矩阵，$r(A)=n$，则________。
(A) A^TA 必合同于n阶单位矩阵； (B) AA^T 必等价于m阶单位矩阵；
(C) A^TA 必相似于n阶单位矩阵； (D) AA^T 是m阶单位矩阵。

3. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\geq 2)$ 线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则以下结论中*不能成立*的是________。
(A) 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关；
(B) 对任一个α_j $(0\leq j\leq s)$，向量组$\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关；
(C) 存在一个α_j $(0\leq j\leq s)$，向量组$\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关；
(D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价。

4．设α是n（$n\geq 3$）维非零实列向量，矩阵$A=E+\alpha\alpha^T$，则________。
(A) A有n个特征值为1； (B) A只有1个特征值为1；
(C) A有$n-1$个特征值为1； (D) A没有任何特征值为1。

5. 设A为$n\times m$阶矩阵，B为$m\times n$阶矩阵，并且$AB=E_n$，则________。
（A）A的行向量组线性相关，B的列向量组线性无关；
（B）A的行向量组线性无关，B的列向量组线性相关；
（C）A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关；
（D）A的行向量组线性无关，B的列向量组线性无关.

二、填空题（本题20分，每小题4分）

1. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$正定，则常数$a$的取值范围为________。

2. 若三阶方阵A有特征值 1，2，2，则行列式$\left|A^{-1}+4A^*\right|=$________。

3. 设A为n阶实矩阵，且$A^T=A^{-1}$，$|A|<0$，则行列式 $|A+E|=$________。

4. 设n阶矩阵A的各行元素之和为0，且A的秩为$n-1$，则$Ax=0$的通解为________。

5. 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，如果向量$\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_t\eta_t$（$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是一组数）也是方程组$Ax=b$的解，那么$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_t=$________。

三．（本题 10 分）计算行列式$|A|$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2+x & \cdots & n-1 & n \\ 1+x & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

四．（本题 20 分）设R^3的两个基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

（1） 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵P；

（2） 已知向量$\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求向量$\gamma$在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标；

（3） 求在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基 β_1,β_2,β_3下有相同坐标的所有向量。

五．（本题 10 分）证明：数域F上的一个n次多项式$f(x)$能被它的导数$f'(x)$整除的充分必要条件是

$$f(x)=a(x-b)^n，\ a,b\in F \text{ 且 } a\neq 0。$$

六．（本题 20 分）已知A为 3 阶实对称矩阵，A的秩$r(A)=2$，$\alpha_1=(0,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$是A对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$的特征向量，试求：

（1）A的另一个特征值λ_3及其对应的特征向量α_3；

（2） 矩阵A，矩阵A^n。

七．（本题 20 分）设A是n阶实对称矩阵，λ_1,λ_n分别是A的最大与最小特征值，则$A-aE_n$当$a>\lambda_n$时是负定的，当$a<\lambda_1$时是正定的。反之，若后面的条件成立，则A的特征根在λ_1与λ_n之间。

八．（本题 10 分）设A,B均为n阶幂等方阵（即$A^2=A,B^2=B$），且$E-A-B$可逆，证明$r(A)=r(B)$。

九．（本题 20 分）令σ是数域F上的线性空间V上的一个线性变换，并且满足条件$\sigma^2=\sigma$。证明：

（1）$\ker\sigma=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$；

（2）$V=\ker\sigma\oplus\operatorname{Im}\sigma$；

（3）如果τ也是V的一个线性变换，那么$\ker\sigma$与$\operatorname{Im}\sigma$都在τ下不变的充分必要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$。