# 北京科技大学
# 2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号： 825　　试题名称： 高等代数　　（共2页）

适用专业： 数学

说明： 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

---

一.（20分）计算下列问题。

1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2）设$D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式，计算$\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$。

二、（20分）

已知方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1+(a+2)x_2 -(b+2)x_3 = 3 \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3 \end{cases}$. 问：当$a,b$取什么值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷多解时，给出这个方程组的通解.

三、（20分）

设$A$为$n$阶矩阵，证明：$A^2=A$的充要条件为$r(A)+r(E-A)=n$，其中$r(A)$表示矩阵$A$的秩.

四、（20分）

设$A$、$B$是$n$阶非零矩阵，且有$A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA=0$. 证明：

1）0，1必是$A$、$B$的特征值;

2）若$\xi$是$A$的属于特征值1的特征向量，则$\xi$也是$B$的属于特征值0的特征向量.

五、（20分）

设$V_1$与$V_2$为线性空间$V$的子空间，证明：$V_1 \cup V_2$为子空间的充要条件为$V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2$.

六、（20分）

设$\sigma$是$n$维线性空间$V$上的线性变换，求证：$\dim \operatorname{Im} \sigma^2 = \dim \operatorname{Im} \sigma$ 的充要条件是$V = \ker \sigma \oplus \operatorname{Im} \sigma$.

七、（20分）

若$B$为正定矩阵，$A$为半正定矩阵，求证：$|A+B| \geq |B|$，且等号成立的充要条件是$A=0$.

八、（10分）

设$a_i$，$1 \leq i \leq n$，是$n$个非负整数，试求多项式$\sum_{i=1}^{n} x^{a_i}$被$x^2+x+1$整除的充要条件.