北 京 科 技 大 学
2010 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 613　　试题名称: 数学分析　　（共 1 页）

适用专业: 数学

说明: 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

1.(15 分)（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{-t^2}dt-x}{\sin x-x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

2.（15 分）设 S 为有界数集，证明：若 $\sup S=a\notin S$，则存在严格增数列 $\{x_n\}\subset S$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

3. (15 分)若函数 $f(x)$ 在点 a 处有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}=f''(a).$$

4.（15 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0,$ 存在，则

存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

5.（15 分） 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$，$f(x,1)=0$，$\dfrac{\partial\ f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$.

6.（15 分）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，求证：（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛.

7.（15 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$、其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1(\mathrm{z}\ge 0)$, 取外侧.

8. (15 分)设函数 $f(x)$ 在实数轴 R 上一致连续，证明存在正数 A、B，使得对任意 $x\in R$，都有 $|f(x)|\le A|x|+B$.

9. (15 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，且满足

1. 任意 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0)\in[a,b]$；
2. 存在 $\eta\in(0,1)$，使得任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le\eta|x_1-x_2|$

证明对任意数列 $\{a_n\}$：$a_1\in[a,b]$ 且 $a_{n+1}=f(a_n)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛.

10.（15 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调，且 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0^+}h\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(kh)=\int_0^{+\infty}f(x)dx$.