北 京 科 技 大 学
2010年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：825　　试题名称：高等代数　　（共 2 页）

适用专业：数学

说明：所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

注意：不必抄写题目，题号写清楚即可。

一．选择题（15分，每小题3分）

1．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性相关的是__________。

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　(B) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

2．设 A 为二阶矩阵，α_1,α_2 均为非零向量且满足 $A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=\frac{1}{2}\alpha_2$ 的通解为（k 为任意常数）__________。

(A) $k\alpha_1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$　　(B) $k\alpha_1+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

(C) $k\alpha_2+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$　　(D) $k\alpha_2+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

3．设五阶矩阵 A 的秩为3，那么其伴随矩阵 A^* 的秩为__________。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 3　　(D) 5

4．设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则必有__________。

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $AP_2P_1=B$　　(C) $P_1P_2A=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

5．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$，则矩阵 A 与矩阵 B __________。

(A)相似但不合同　　(B)合同但不相似　　(C)相似且合同　　(D)不合同且不相似

二．填空题（15分，每小题三分）

1．在6阶行列式中的项 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 应带有的符号为__________。

2．矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为__________。

3．方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 基础解系中解向量的个数为____________。

4．设 3 阶矩阵 A, B 相似，矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|B|=$____________。

5．若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是____________。

三．(20 分) 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$，其中 $x\neq a_i, 1\le i\le n$。

四．(20 分) 已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)^{\mathrm T},\alpha_2=(1,1,3,5)^{\mathrm T},\alpha_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm T},\alpha_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm T}$ 及 $\beta=(1,1,b+3,5)^{\mathrm T}$，

(1) a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一线性表示？并写出该表示式。

五．(15 分) 若整系数多项式 $p(x)$ 与 $f(x)$ 有一个公共根，且 $p(x)$ 为不可约多项式，那么 $p(x)\mid f(x)$。

六．(15 分) 设 A 为 n 阶矩阵，则 $rankA=1$ 的充分必要条件是存在 n 维非零列向量 α,β，使得 $A=\alpha\beta^T$。

七．(20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。

八．(20 分) 设线性空间 V 的线性变换 σ 满足 $\sigma^2=\sigma$，称之为幂等变换。证明：

(1) V 中向量 β 属于 σ 的象集 $\operatorname{Im}\sigma$ 当且仅当 $\sigma(\beta)=\beta$。

(2) $V=\operatorname{Im}\sigma\oplus\ker\sigma$，且 V 的任一向量的直和分解为 $\alpha=\sigma(\alpha)+(\alpha-\sigma(\alpha))$。

(3) 对任一直和分解 $V=V_1\oplus V_0$，存在唯一的幂等变换 σ 使得 $V_1=\operatorname{Im}\sigma, V_0=\ker\sigma$。

(4) 每个幂等变换都有方阵表示 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

九．(10 分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是秩为 n 的二次型。证明：存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 V_1（s 是符号差）使对任一 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$ 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$。