北京科技大学

2010年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 610　　试题名称: 单考数学　　（共 2 页）

适用专业: 全校各专业

说明: 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

一、单选题（本题共10小题，每小题4分，满分40分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\ln(1+x^3)}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ （　）

(A) 4.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{\ln^2(1+h)}=1$，则 （　）

（A） $f(0)=0, f'(0)=1$.（B） $f(0)=1, f'_-(0)=1$.

（C） $f(0)=0, f'_+(0)=1$.（D） $f(0)=1, f'_+(0)=1$.

(3) 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则 （　）

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

（C） $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　（D） 以上都不对.

(4) 下列反常积分收敛的是 （　）

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$.　(B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$.　(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$.　(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

(5) 设曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ （　）

（A） $\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$.（B） $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.（C） $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$.（D） $1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(6) 设函数 $z=f(x,y)=e^{xy}\sin(\pi y)+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f'_x(1,1), f'_y(1,1)$ 分别等于 （　）

（A） $-\dfrac{\pi}{4},\pi e$.（B） $\dfrac{\pi}{4},\pi e$.（C） $-\dfrac{\pi}{4},-\pi e$.（D） $\dfrac{\pi}{4},-\pi e$.

(7) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\big(g(x)-\varphi(x)\big)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ （　）

（A） 存在且等于0.（B） 存在但不一定等于0. (C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

(8) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 （　）

（A） $f(x)$ 不存在间断点.　（B） $f(x)$ 存在间断点 $x=-1$.

(C) $f(x)$ 存在间断点 $x=0$.　(D) $f(x)$ 存在间断点 $x=1$.

(9) 设曲线 $y=f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$，则曲线 $y=f(x)$ （　）

（A） 有两条垂直渐近线及一条斜渐近线.　（B） 没有渐近线.

(C) 只有水平渐近线 $y=0$.　(D) 仅有两条垂直渐近线.

(10) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上可导，且 $f'(x)<0$, 当 $0<t<1$ 时，则 (　　)

(A) $\int_0^t f(x)dx > t\int_0^1 f(x)dx$.　(B) $\int_0^t f(x)dx = t\int_0^1 f(x)dx$.

(C) $\int_0^t f(x)dx < t\int_0^1 f(x)dx$.　(D) $\int_0^t f(x)dx \le t\int_0^1 f(x)dx$.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

(11) 设 $a\ne\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n=$____.

(12) 设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0, f'(0)\ne 0$，$F(x)=\int_0^x (x^3-t^3)f(t)dt$，当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同价无穷小，则 $k=$________.

(13) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds=$________.

(14) 设函数 $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$ (C_1, C_2 是任意常数)，为某二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为______________________________.

(15) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域是________.

(16) $\int x^2e^x dx=$________________.

三、解答题((17～24 题，共 86 分，解答应写出文字说明、证明步骤和演算过程)

(17)(本题满分 11 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ x\ , & 1\le x\le 2.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0,\ 2)$ 内的连续性。

(18) (本题满分 11 分) 计算 $\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(19) (本题满分 11 分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

(20) (本题满分 11 分) 计算曲线积分 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,\ 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},\ 1)$ 的一段弧.

(21) (本题满分11分) 计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma (y-z)xdydz+(x-y)dxdy$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

(22) (本题满分11分) 在曲线 $y=x^2(x\ge 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线及 x 轴所围图形 B 的面积为 $\frac{1}{12}$，求平面图形 B 绕 y 轴旋转一周所围成的立体的体积。

(23) (本题满分 10 分) 已知 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非零函数，对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=1$，求 $f(x)$.

(24) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且在 $(0,\ a)$ 内某点处取得最大值，且对一切 $x\in[0,\ a]$ 都有 $|f''(x)|\le m$ (其中 m 为常数)，证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le ma$.