# 北 京 科 技 大 学
# 2011 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：825　　试题名称：高等代数　　（共 2 页）

适用专业：数学

说明：所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

**注意：第一、二大题不必抄题，在答题纸上写清题号即可。**

一．填空题（本题 20 分，每小题 4 分）

1． 已知 $A$ 为 $n$ 阶方阵且 $|A|=3$，则 $|A^{-1}+2A^*|=$________。

2． 设 $A$ 是 3 阶可逆矩阵，$A$ 的第 1 行与第 2 行交换后得到矩阵 $B$，则 $AB^{-1}=$________。

3． 已知方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷解，则 $a=$________。

4． 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，且 $A$ 有一特征值 $\lambda=6$，则 $a=$________。

5． 从 $R^3$ 的基 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,0)^T$ 到基 $\beta_1=(1,-2,1)^T$，$\beta_2=(1,2,-1)^T$，$\beta_3=(0,1,-2)^T$ 的过渡矩阵 $P=$________。

二．选择题（本题 20 分，每小题 4 分）

1． 设 5 阶矩阵 $A$ 的秩为 3，那么其伴随矩阵 $A^*$ 的秩为________。
（A） 0　　（B） 1　　（C）3　　（D）5

2． 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是________。
（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$　　（B）$\alpha_1$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
（C）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2$，$2\alpha_1+\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$

3．设三元非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=b$ 的两个解为 $\alpha=(1,0,2)^T,\beta=(1,-1,3)^T$，且系数矩阵 $A$ 的秩为 2，则对于任意常数 $k,k_1,k_2$ 方程组的通解为________。

（A）$k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　　（B）$(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$

（C）$(1,0,2)^T+k(2,-1,5)^T$　　（D）$(1,0,2)^T+k(0,1,-1)^T$

4． 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值为________。

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

5． 已知 4 阶行列式 D 的某一行元素及其余子式都为 a，则 D 等于________。

（A）0　　（B）$a^2$　　（C）$-a^2$　　（D）4

三．（本题 15 分）计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&0&\cdots&0\\1&0&a_3&\cdots&0\\&\cdots&&\cdots&\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，$(a_i\neq0,i=1,2\cdots n)$。

四．（本题 15 分）设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r$，证明存在秩为 $n-r$ 的 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

五．（本题 15 分）证明：实对称的正交矩阵的特征值必为 1 或 $-1$。

六．（本题 15 分）求以三次方程 $x^3+x+1=0$ 的三个根的平方为根的三次方程。

七．（本题 15 分）设 $n>1$ 阶实方阵 $A_n=\begin{pmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{pmatrix}$。（1）求矩阵 $A_n$ 的秩；（2）矩阵 $A_n$ 何时是正定的？

八．（本题 15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基，向量 $\beta\in V$ 可以由这组基中的任意 $n-1$ 个线性表示，证明 $\beta=0$。

九．（本题 20 分）设线性空间 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，证明：存在 $V$ 的线性变换 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 使得（1）$\sigma_i^2=\sigma_i$，$1\le i\le s$；（2）$\sigma_i\sigma_j=0$，$i\neq j$；（3）$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_s=I$ 为恒等变换；

（4）$\mathrm{Im}\,\sigma_i = W_i$，$1 \le i \le s$。