

北京科技大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 613 试题名称: 数学分析 (共 2 页)

适用专业: 数学

说明: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试题或草稿纸上无效。

1. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明: (1) 存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\xi) = \xi$; (2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得

$f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

2. (15 分) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

3. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次连续可微, 且 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, 证明:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24},$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

4. (15 分) 求积分 $\int \frac{5 \sin x + 2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} dx$.

5. (15 分) 已知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 试讨论函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处

是否连续?

6. (15 分) 求空间一点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离.

7. (15 分) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dy$, 在 $[a, b] (a > 0)$ 上一致收敛.

8. (15 分) 计算 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 是球面 $(x-a)^2$

$+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ，并取外侧为正向。

9. (15 分) 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ 。证明：存在

$\xi \in (a,b)$ ，使得 $f(\xi) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1)f(x_k)$ 。

10. (15 分) 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散：

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ln n}}$