

北京科技大学

2011年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 610 试题名称: 单独考试数学 (共 2 页)

适用专业: 全校各专业单考生

说明: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试题或草稿纸上无效。

一、单项选择题 (本题8小题, 每题4分, 满分32)

1. 下列极限中能使用罗必达法则的有 ()

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$. (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$. (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$. (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x^2}$.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处 ()

(A) 无定义. (B) 不连续. (C) 可导. (D) 连续但不可导.

3. 函数在点 x_0 处连续是在该点处可微的 () 条件

(A) 充分但不必要. (B) 必要但不充分. (C) 充分必要. (D) 既非充分也非必要.

4. 函数 $y = \arctan x^2$ 在其定义域内是 ()

(A) 单调增函数. (B) 单调减函数. (C) 有增有减的函数. (D) 无界函数.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(2x) + f(x-2)$ 是 ()

(A) 无意义. (B) 在 $[0, 2]$ 上有意义. (C) 在 $[0, 4]$ 上有意义. (D) 在 $[2, 4]$ 上有意义.

6. 将函数 $x \sin 2x$ 展开成 x 的幂级数时, x^4 的系数是 ()

(A) $\frac{4}{3}$. (B) $-\frac{4}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $-\frac{2}{3}$.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & 1 < x \leq 0, \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, & 0 < x < 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

(A) 无极限. (B) 有极限但不连续. (C) 连续但不可导. (D) 可导.

8. 微分方程 $y'' + py' + q = 0$ 的通解为 $y = e^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$, 则常数 p 和 q 分别为 ()

(A) $-2, 5$. (B) $2, -5$. (C) $2, 3$. (D) $-2, -3$.

二、填空题 (本题6小题, 每题4分, 满分24)

9. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\int_a^{\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$, 求 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} (x-1)^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t + e^{-t} - 2) dt}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} (z+a) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (本题6小题, 每题10分, 满分60)

15. 求曲线 $y = (x-2)^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{9}x^2$ 的凹凸区间与拐点.

16. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

17. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

18. 计算 $I = \int_l (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 l 是由点 $O(0,0)$ 沿折线 $y = 1 - |x-1|$ 至点 $A(2,0)$ 的一段弧.

19. 设 $z = f(xy^2, x+y)$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

20. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是介于椭球面 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 之间的部分.

四、应用题 (本题12分)

21. 求曲线 $xy = 1$ 与直线 $y = 2, x = 3$ 围成区域的面积 S 及绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 V .

五、综合题 (本题12分)

22. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = \sin ax (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积

分 $\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$ 的值最小.

六、证明题 (本题10分)

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x) < 1$, 证明 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $[0,1]$ 上只有一个根.