北 京 科 技 大 学
2012 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 825 试题名称: 高等代数 （共 2 页）

适用专业: 数学、统计学

说明: 所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效.

一（15 分）、判断 $f(x)=x^5-3x^4+5x^3-7x^2+6x-2$ 有无重因式，若有，请求出 $f(x)$ 的所有重因式并指出其重数.

二（20 分）、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

（1）计算矩阵 AB^T 以及行列式 $\left|AB^TBA^T\right|$；

（2）求矩阵 C，使得 $CA=B$.

三（20 分）、研究 k 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=5\\3x_1+2x_2+kx_3=18-5k\\x_2+2x_3=2\end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）有无穷多解；（3）无解.

四（20 分）、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

（1）求参数 c 使得该二次型的秩等于 2；

（2）写出该二次型的矩阵 A；

（3）求一个正交矩阵 P 和一个对角矩阵 Λ 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；

（4）求一个非退化线性替换 $x=Cy$ 把该二次型化为标准形.

五(20分)、设$V=R^4$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1=(1,2,-1,-3),\alpha_2=(-1,-1,2,1),\alpha_3=(-1,-3,0,5),$$

$$\beta_1=(-1,0,4,-2),\beta_2=(0,5,9,-14).$$

求（1）V_1的维数与一组基；（2）V_2的维数与一组基；（3）V_1+V_2的维数与一组基；（4）$V_1\cap V_2$的维数与一组基.

六（15分)、设$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -9 & 4 & -6\\ -9 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

（1）求A的初等因子；

（2）求出A的 Jordan 标准形.

七（10分)、设σ是线性空间V上的线性变换，而$\xi\in V$. 设$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$都不等于零，但$\sigma^k(\xi)=0$. 证明：$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$线性无关.

八(15分)、设σ是线性空间V上的线性变换，满足$\sigma^2-3\sigma+2I=0$，其中I是恒等变换. 证明σ的特征值只能是1或2.

九(15分)、设A、B都是n阶方阵，证明：如果$A^2=E$，则

$$rank(A+E)+rank(A-E)=n$$

其中E为n阶单位矩阵，$rank(\cdot)$表示矩阵的秩.