

# 北 京 科 技 大 学

## 2012 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 610 试题名称: 单独考试数学 (共 3 页)

适用专业: 全校各专业单独考试考生

说明: 所有答案必须写在答题纸上, 做在试题或草稿纸上无效。

### 一、单项选择题 (本题8小题, 每题4分, 满分32)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{-2t^2} dt} = ( \quad )$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D)  $\infty$ .

2. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内由定义, 则下列函数中必为奇函数的是

(A)  $y = |f(x)|$ . (B)  $y = -|f(x)|$ . (C)  $y = f(x)$  (D)  $y = xf(x^2)$ .

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 < x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$  在  $x=1$  处间断是因为 ( )

(A)  $f(x)$  在  $x=1$  处无定义. (B)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  不存在.

(C)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  不存在. (D)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.

4.  $\Sigma$  是  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  介于  $z=0$  及  $z=2$  之间的下侧, 则  $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy =$

( )

(A)  $\pi$ . (B)  $2\pi$ . (C)  $4\pi$ . (D)  $8\pi$ .

5. 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$  ( $0 < x < +\infty$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{3}\right)^n$  的收敛半径为 ( )

(A)  $\frac{R}{3}$ . (B)  $\frac{3}{R}$ . (C)  $R$ . (D)  $3R$ .

6. 设  $L$  是由直线  $y=0, x=1$  及  $x+y=1$  所围成的三角形的正向边界, 则曲线积分

$$\int_L xdy - 3ydx = ( \quad )$$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

7. 设  $f(x) = \ln \tan x$ , 则  $f'(x) = ( \quad )$

(A)  $\frac{1}{\tan x}$ . (B)  $\frac{2}{\sin 2x}$ . (C)  $-2 \tan 2x$ . (D)  $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ .

8. 设  $D$  是圆域  $x^2 + y^2 \leq 4$ , 则  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = ( \quad )$

(A)  $\frac{8\pi}{3}$ . (B)  $\frac{16\pi}{3}$ . (C)  $4\pi$ . (D)  $\pi$ .

## 二、填空题 (本题6小题, 每题4分, 满分24)

9. 设  $P(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ , 则  $P'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10.  $y = f(x)$  由方程  $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0,0)$  处的切线斜率  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

11.  $\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12.  $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13.  $\int_0^1 e^{\sqrt{2x+1}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14.  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、计算题 (本题7小题, 每题10分, 满分70)

15. 求  $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$  极值和拐点.

16. 设  $x = z \ln(\frac{z}{y})$ , 求  $dz$ .

17. 判定交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  的敛散性.

18. 求由方程  $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$  所确定的隐函数  $z = z(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处的全微分.

19. 设  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt, x > 0$ , 求  $f(x) + f(\frac{1}{x})$ .

20. 求  $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx$ .

21. 已知  $g(x)$  具有二阶连续导数, 且  $g(0) = 1$ , 又函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

确定  $a$  的值使  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续; (2) 求  $f'(x)$ ; (3) 讨论  $f'(x)$  在  $x = 0$  的连续性.

#### 四、应用证明题 (本题2小题, 每题12分, 满分24)

22. 求曲线  $y = \frac{1}{x}$  与直线  $y = 4x, x = 2$  围成区域的面积  $S$  绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积  $V$ .

23. 证明: 当  $x > 0$  时,  $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ .