

北方交通大学一九九六年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：运筹学

一、给定LP问题：

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= CX \\ \text{s.t. } \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中： $A = (a_{ij})_{m \times n} \quad n > m$
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$
 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

试述何谓可行解、基矩阵、基变量、基本解、基本可行解、最优解。(10分)

二、下列LP问题：

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 6x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t. } \begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \leq 300 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1. 用图解法求最优解；
 2. 写出其对偶问题，并用对偶单纯形法求对偶问题最优解；
 3. 若上述LP问题是一个资源限制的生产计划问题，试述其对偶问题解的经济意义。
- (10分)

三、试用大M法求解下列LP问题：

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + \dots \\ -x_2 \geq 0, j=1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

四、某公用甲、乙、丙、丁4种资源生产A、B、C3种产品，消耗及利润如下表。

产品 \ 资源	资源				利润
	甲	乙	丙	丁	
A	1	1/2	1	1	1.5
B	2	1/3	1/4	2	
C			1/3	1/3	
二 限量	320	200	300	400	

1. 建立使获利最大的LP模型。
2. 若此LP问题的最优单纯形表如下：

C_j			1	2	1.5	0	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	x_2	72	0.3	1	0	0.6	-0.6	0	0
1.5	x_3	704	1.6	0	1	-0.8	4.8	0	0
0	x_4	194	0.725	0	0	-0.05	-0.45	1	0
0	x_7	21.33	-0.13	0	0	-0.93	-0.4	0	1
Z_j			3	2	1.5	0	6	0	0
$C_j - Z_j$			-2	0	0	0	-6	0	0

问：(1)如果使 A 产品的单位成本减少 3，总利润是否可增加？为什么？

(2)资源乙增加 50 单位，利润可增加多少？求出新的最优解。

(3)若 A 产品对资源乙的消耗由 $1/2$ 减至 $1/3$ ，问生产 A 是否有利？如有利，求出新的最优解。如无利，问 A 对乙的消耗减少至多少时，生产 A 才有利？(15分)

五、某公司用资源 I、II、III 生产 A、B、C 3 种产品，单位产品对资源的消耗及利润如下表。此外，每种产品只要生产，则需支付一笔固定费用，生产 A 支付 500 元；生产 B 支付 650 元，生产 C 支付 720 元，且若 A 不生产，B 则不能生产，试建立收益最大的混合整数规划模型。(15分)

资源 \ 产品	A	B	C	限量
I	1	3	2	500
II	2	1	3	400
III	4	5	1	600
利润	10	14	8	

六、某公司有 3 个分公司，现有资金 5 千万元，拟对 3 个分公司增加投资，投资所获年效益如下表：

投资额 \ 分公司	1	2	3
0	0	0	0
1	5	-	3
2	6	8	5
3	-	9	5
4	-	12	6
5	-	-	7

问：如何决策可使公司总年收益最大？(用求网络极值方法解)(10分)

七、用动态规划方法求解第六题(不能用图解法)(15分)

八、连通的无向图中两个顶点之间的距离定义为连接这两个顶点的路中，具有最小边数的一条路上的边数。一个无向连通图的直径定义为所有点之间距离的最大值。

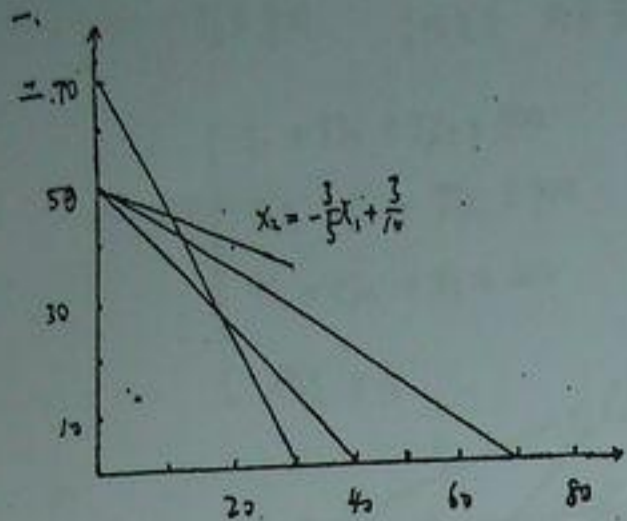
1. 设图的顶点表示计算机，图的边表示计算机之间数据传输的通路。问在此情况下图的直径 d 的含义是什么？

2. 设 d 表示一个具有 n 个顶点的图的直径， δ 表示顶点阶的最大值。证明：

$$1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \delta(\delta - 1)^2 + \dots + \delta(\delta - 1)^{d-1} \geq n$$

(15分)

九六



最优解为 (0, 50)

2. 对偶问题: $\text{Max } Z' = 300x_1 + 200x_2 + 300x_3$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z' = -300x_1 - 200x_2 - 300x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -10x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = -6 \\ -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_5 = -10 \end{cases}$$

终表:

C_B	Y_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	6.5	5	0	3.5	1	$-\frac{9}{4}$
-200	x_2	2.5	1	1	1.5	0	$-\frac{1}{4}$
	$C_j - Z_j$		-100	0	0	0	-50

最优解: $x_1=0, x_2=2.5, x_3=0$

$$\text{Min } Z = -x_1 - 3x_2 + x_3 + Mx_4 + Mx_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, 5$$

终表:

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
-3	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$C_j - Z_j$		0	0	3	$M + \frac{5}{3}$	$M + \frac{2}{3}$

解: $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{8}{3}$

四. $\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 1.5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 320 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 200 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \leq 300 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 成本减少了, 即利润增加 3. $\Delta C_1 = 3$

$$4 - [2 \ 1.5 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0.3 \\ 2.6 \\ 0.725 \\ -0.13 \end{bmatrix} = 1.70$$

\therefore 利润增加

$$(2) B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 72 \\ 704 \\ 194 \\ 21.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 \\ 240 \\ -22.5 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 944 \\ 171.5 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

利润增加 300

最优解: $x_1=0, x_2=42, x_3=944$

$$(3) \sigma_1' = C_1 - C_B B^{-1} P_1' = \{1 - [0, 6, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\} = -1 < 0$$

\therefore 全产不利

$$\sigma_1'' = C_1 - C_B B^{-1} P_1'' = 1 - [0, 6, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 6x > 0$$

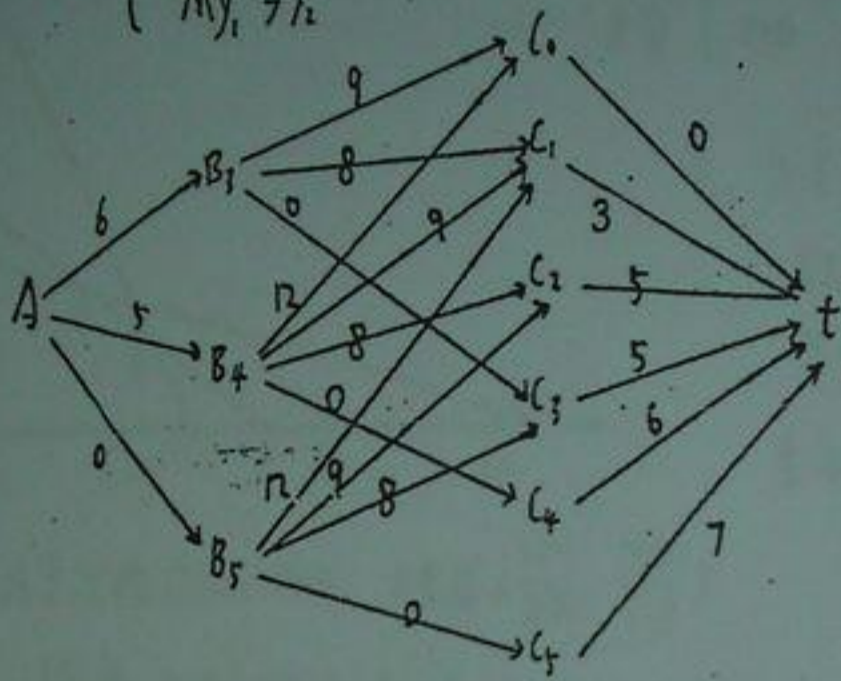
\therefore A 消耗铁 7 吨 时, 产量才为 50

五. $\text{Max} = -500y_1 + 10x_1 - 650y_2 + 14x_2 - 720y_3 + 8x_3$

$x_j \leq y_j M \quad j=1,2,3 \quad M$ 为充分大常数

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 600 \\ My_1 \geq y_2 \end{cases}$$

六



网络最长路 A, B4, C2, t

1分公司投入14万, 2分公司投24万

3分公司投入24万

总收益为 $5+8+5=18$

七. 用逆推、图求法 最终答案同上 步骤略

八.