已对钊

16

北方交通大学一九九七年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：数学分析　　　　共二页

1. （本题满分10分）设：

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)dz$$，其中$f(z)$可微．求$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$．

2. （本题满分15分）设函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，且$f(x)>0$．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b[f(x)]^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\max_{a\le x\le b}f(x).$$

3. （本题满分15分）设$\phi(x)$是$(-\infty,\ +\infty)$上的连续周期函数，周期为1，且

$\int_0^1\phi(x)dx=0$．又$f(x)$在$[0,\ 1]$上有连续的一阶导函数，令

$$a_n=\int_0^1 f(x)\phi(nx)dx\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛．

4. （本题满分15分）计算曲面积分:

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

其中Σ是空间区域$\Omega=\{(x,y,z):\ |x|\le 2,\ |y|\le 2,\ |z|\le 2\}$的边界曲面，取外侧.

5. （本题满分15分）设$[0,\ +\infty)$上的连续函数序列$\{f_n(x)\}$有性质:

（1）. 在$[0,\ +\infty)$上，$|f_n(x)|\le g(x)$，且积分$\int_0^{+\infty}g(x)dx$收敛

（2）. 在任何有限区间$[0,\ A]$ $(A>0)$上，$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx$

6. （本题满分15分）设:

$F=\{f(x):\ f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，$f(x)\ge 0$，$f(0)=0$，$f(1)=1\}$. 证明: $\inf\limits_{f\in F}\int_0^1 f(x)dx=0$；但不存在$f_0\in F$，使得$\int_0^1 f_0(x)dx=0$

7. （本题满分15分）设: $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$，证明:

(1). 当n为偶数时，对任意的实数x，有 $P_n(x)>0$.

(2). 当n为奇数时，$P_n(x)$有且仅有一个实根.

(3). 设x_m为$P_{2m+1}(x)$的实根. 则 $x_m<0$，且$\lim\limits_{m\to\infty}x_m=-\infty$.