

北方交通大学一九九八年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程: 数学分析 共二页

1998年硕士研究生入学考试数学分析试卷

一. (本题满分10分)

取 u, v 为新的自变量, $w = w(u, v)$ 为新函数, 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$$

设: $u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}, w = ze^y$. (假设出现的各阶导数皆连续.)

二. (本题满分15分)

试求:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^u dz \iint_D \frac{\sin(z\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

其中, $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

三. (本题满分15分)

计算第二型曲线积分

$$I = \int_{L^-} x dy - y dx$$

其中 $L^-: x^{2n+1} + y^{2n+1} = a x^n y^n (x \geq 0, y \geq 0)$, 取逆时针方向.

已对 5.18

四. (本题满分 15 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 函数 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 并且:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

证明: 函数 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

五. (本题满分 15 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 并且

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx = 0,$$

证明: 函数 $f(x)$ 在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有两个零点.

六. (本题满分 15 分)

证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内收敛, 但不一致收敛, 而和函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内无穷次可微.

七. (本题满分 15 分)

设 $\{a_n\}$ 是正实数序列, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$$

也收敛.