407　55

北方交通大学一九九九年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：高等代数　　　　共三页

(共23分)完成下列各题：

1.(5分)试求 $x^3-3px+2q$ 能被 $x^2+2ax+a^2$ 整除的条件.

2.(5分)设A、B为同阶实方阵，求证 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|$.

3.(6分)证明，A为正交变换的必要条件为保持任两向量的夹角不变. 并说明条件不充分.

4.(7分)求λ-矩阵的初等因子和不变因子：$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$.

(共13分)

1.(5分)计算n阶行列式的值：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.(8分)计算 $f(x+1)-f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

(8分)设

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，(1)证明：当 $n\geq 3$ 时，$A^n=A^{n-2}+A^2-E$；

(2)求 A^{100}.

四.（8分）设T是n维线性空间V的一个线性变换，λ_0是T的一个特征值，而V_{λ_0}为T的关于特征值λ_0的特征子空间，证明，V_{λ_0}的维数$\leq\lambda_0$的重数.

五.（8分）设A、B均为厄米特矩阵，A非奇异，证明，A和B能同时化为对角阵的必要条件为 $|\lambda A-B|=0$ 全为实根

六.（8分）设 $A_{(n-1)\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1),1}, & a_{(n-1),2}, & \cdots & a_{(n-1),n} \end{bmatrix}$，而$M_j$是A中划去第$j$列剩下的$(n-1)$阶方阵的行列式. 求证：

(1). $C=(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)'$ 是 $AX=0$ 的一个解.

(2) 若秩$A=n-1$，则 $AX=0$ 的所有解向量均为C的倍向量.

七.（10分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是一组线性无关的向量，且$\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}\alpha_j$，$i=1,2,\cdots,m$. 证明，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关的充分和必要条件是：

$$D=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}\neq 0$$