

33 2000年北方交通大学硕士研究生入学考试

考试科目: 数学分析

1. 求下列极限 (10分)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x - \sin x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^x$$

2. 设实函数  $f(x)$  定义在整个实轴上, 而且对所有的实数  $x$  与  $y$ , 有

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2,$$

试证  $f(x)$  为常数. (10分)3. 设  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的连续可微函数,  $f(a) = f(b) = 0$ , 而且

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1,$$

证明

$$(1) \int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2},$$

$$(2) \int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x) dx > \frac{1}{4} \quad (15分)$$

4. 试给出一个利用某函数的 Maclaurin 展开计算圆周率  $\pi$  的公式, 并给出展开到第  $(n)$  项后的误差估计. (15分)5. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0$ . 证明  $na_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (12分).6. 设  $f(x, y, z)$  可微. 则  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$  的充分必要条件是

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf$$

其中  $k$  为实数. (12分)7. 设由旋转抛物面  $az = a^2 - x^2 - y^2$  ( $a > 0$ ), 平面  $z = a - x - y$  与三个坐标面所围成区

域的体积. (13分)

8. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$  ( $a > 0$ ) 的敛散性 (13分)