2000年北方交通大学硕士

考试科目：高等代

一、判断对错（在题后的括号内，对的打"√"，错的打"×"）。(16分)

1. 多项式 $f(x)=x^3+x+5$ 在有理数域 Q 上是不可约多项式。（ ）

2. 单位向量 $e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$，$e_3=(0,0,1)$ 可分别表示成 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(1,3,4)$，$\alpha_3=(0,2,2)$ 的线性组合。（ ）

3. 两复数矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&&0&\\&&1&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&1&0&\\&&&0\end{pmatrix}$ 是相似的。（ ）

4. 实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是正定的。（ ）

二、选择题（只有一个选项是正确的，把所选项前的字母填在题后的括号内）。(8分)

1. 设 n 个未知数的线性方程组 $AX=0$ (I) 有两个不同的解 α_1,α_2，且系数矩阵 A 的秩为 $n-1$，则

(A) α_1 是方程组 (I) 的基础解系；

(B) α_2 是方程组 (I) 的基础解系；

(C) $\alpha_1-\alpha_2$ 是方程组 (I) 的基础解系；

(D) $\alpha_1+\alpha_2$ 是方程组 (I) 的基础解系。（ ）

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}+a_{11}&a_{22}+a_{12}&a_{23}+a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则必有

(A) $P_1P_2A=B$　(B) $P_2P_1A=B$　(C) $AP_1P_2=B$　(D) $AP_2P_1=B$（ ）

三、(22分)

1. 计算：$D_4=\begin{vmatrix}4&4&4&4\\0&1&2&3\\0&2&3&3\\0&3&3&3\end{vmatrix}$ (6分)

2. 计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}$ (8分)

士研究生入学考试试题

代数

3. 设4阶方阵 A 满足：
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}，其中 P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&-2&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}，$$
试求：(1) A^5；(2) A^8　（8分）

四. 已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&a&0\\-4&b&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量。（12分）

1. 试确定参数 a,b 以及特征向量 ξ 所对应的特征值；
2. 问 A 能否相似于对角矩阵？说明理由。

五. 设 A 是 n 阶方阵，m 是一个自然数。试证明：（10分）
存在 $n\times m$ 非零矩阵 B，使 $AB=0$ 充要条件是行列式 $|A|=0$。

六. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 上线性变换。
试证明：（12分）
1. 若线性变换 $\mathscr{A}$ 是可逆的，则 $\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n$ 也是 V 的一组基；
2. 设 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^5+2\mathscr{A}=\mathscr{E}$（恒等变换）。那么对 $\gamma_1,\gamma_2\in V$，
若 $(\gamma_1,\mathscr{A}\alpha_i)=(\gamma_2,\mathscr{A}\alpha_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\gamma_1=\gamma_2$。（$(\cdot,\cdot)$ 表示 V 之内积）

七. 设3阶方阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 与矩阵 $B(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&\lambda^2+\lambda&(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$ 等价。（10分）
1. 试求 $\lambda E-A$ 的标准形；
2. 求 A 的若当标准形。

八. 设 V 是数域 P 上线性空间，$\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 V 中向量，且满足：1) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，
2) β_1 可用向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，
3) β_2 不能用向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表出。（10分）
证明：对任意 $l\in P$，向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ l\beta_1+\beta_2$ 是线性无关的。