8

2002年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：数学分析　　　　第一页 共一页

请写出：1、考生携带的有关用品：只带书写与涂改工具

2、对考生的具体要求：

1. 请完成以下证明或计算（共60分）：

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 $a>1$；

（2）证明数列 $\{a_n\}$ 的收敛性，其中 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$；

（3）根据导数的定义证明 $(\ln x)'=\frac{1}{x},(x>0)$；

（4）计算 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$；

（5）计算 $\int e^{\sqrt{x}}dx$；

（6）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$；

（7）计算第二型曲线积分 $\int_C 4xy^2dx-3x^4dy$，其中曲线 C 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，从 $(1,\frac{1}{2})$ 到 $(2,2)$；

（8）判定函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 的收敛区间，并讨论在区间 $[0,1]$ 上是否一致收敛；

（9）将函数 $f(x)=x^2$ 在 $(0,2\pi]$ 展成傅立叶级数，并画出该级数的和函数的图象；

（10）证明：若 $P(x_0,y_0,z_0)$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上任意一点，则点 P 处的法线必通过球心；

2. 试利用闭区间套定理证明有限覆盖定理(10分).

3. 若函数组 $u(x,y),v(x,y)$ 有连续的偏导数，而 $x=x(s,t),y=y(s,t)$ 也有连续的偏导数，试计算 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ (10分).

4. 试叙述一个定义在 $[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 可积分的充要条件，并由此证明如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续则一定可积(20分).