15

# 北方交通大学2003年硕士研究生入学考试试卷

科目：高等代数　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分。

一.（15分）设 $f(x)$ 是复数域上次数大于0的多项式，且 $f(x)\mid f(x^n)$，$n$ 是大于1的整数。证明：$f(x)$ 的根只能是零或单位根。

二.（20分）设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

设 $M_i$ 是 $A$ 中划去第 $i$ 列剩下的 $(n\text{-}1)$ 阶矩阵的行列式。

（1）证明：$(M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n)$是方程组的一个解；

（2）若 $A$ 的秩为 $n-1$，则方程组的解全是 $(M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数。

三.（25分）设 $A^*$ 为 n (n≥2) 阶矩阵 $A$ 的伴随矩阵。

（1）证明：

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & 若\ r(A)=n, \\ 1, & 若\ r(A)=n-1, \\ 0, & 若\ r(A)<n-1 \end{cases}.$$

（2）证明：

$$(A^*)^*=\begin{cases} A, & 若 n=2, \\ |A|^{n-2}A, & 若 n>2. \end{cases}$$

# 北方交通大学 2003 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数 

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分。

四.（20 分）设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$$

求 $P^{3\times3}$ 中全体与 $A$ 可交换的矩阵所成的子空间的维数和一组基。

五.（20 分）已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 4 维线性空间 V 的一组基，线性变换 A 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

（1）求 A 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\ \eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\ \eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,$ $\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵;

（2） 求 A 的核，并求它的维数(即零度)及一组基;

（3） 求 A 的值域，并求它的维数(即秩)及一组基.

六.（15 分）设复系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{bmatrix}$$

（1）求 $A$ 的不变因子.

（2）求 $A$ 的初等因子.

（3）求 $A$ 的 Jordan 标准形.

事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分。

七.（15 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 $n$ 维欧氏空间 V 中一组向量，它的格拉姆矩阵

$$\Delta = \begin{bmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{bmatrix}.$$

证明：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当 $|\Delta| \neq 0$.

八.（20 分）求正交矩阵 $T$ 使 $T^T A T$ 成对角形(这里 $T^T$ 是矩阵 $T$ 的转置)，并写出相应的对角矩阵，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$