北京交通大学2004年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：运筹学

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一（30分）回答下列问题：

1、什么是线性规划问题的基可行解？

2、什么是可行流？

3、什么是关于可行流 f 的增广链？

4、线性规划问题最优解共有几种可能？并写出各自相应的判别准则。

5、非标准指派问题：某大型工程有五个工程项目，决定向社会公开招标，建设公司 A_1，A_2，A_3 参加招标承建，根据实际情况，可允许每家建设公司承建一项或二项工程。报价表如右，单位万元。如何将其化成标准的指派问题（只转化成标准指派问题即可，不要求求解）

公司 \ 工程	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7

二、（30分）某厂生产甲、乙两种产品，需要A、B两种资源，有关资料如下：

产品 \ 单位消耗 \ 资源	A	B	单位产品利润
甲	1	1	3
乙	1	2	4
资源最大供应量	6	8	

（1）求使工厂获利润最大的生产计划（列出模型并求解）；

（2）确定原最优基不变条件下，产品甲的单位利润的允许可变范围；

（3）若该厂准备出让资源给另一个工厂，构成原问题的对偶问题，列出对偶问题的数学模型。

（4）资源A、B的影子价格是多少？

（5）试用此例的计算结果，验证和解释对偶理论中的互补松弛定理的正确性。

三、（20分）设有产量分别30，50，60的三个原料产地 A_1，A_2，A_3，欲将原料运往需求量分别为15，10，40，45的四个销地，运价表如下，试求运费最省的调运方案。

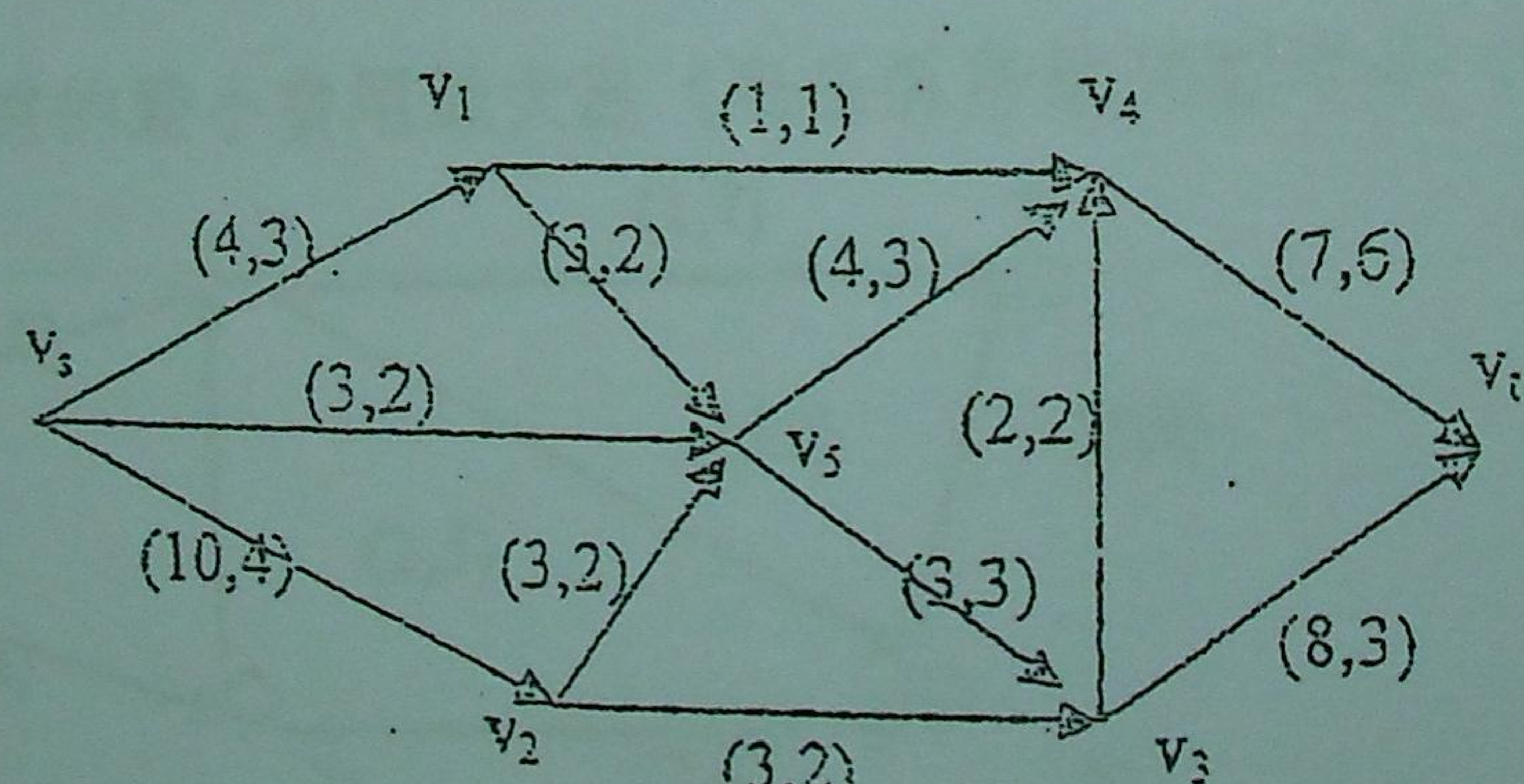
考试科目：运筹学

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	5	8	4	30
A2	7	4	8	6	50
A3	10	3	5	2	60
销量	15	10	40	45	

四、(25 分) 某工厂有 100 台机器，拟分四期使用，在每一期都有两种生产任务。根据经验，若把 x_1 台机器投入第一种任务，则在本期结束时将有 $1/3x_1$ 台机器损坏报废。剩下的机器全部投入第二种生产任务，则有 1/10 的机器在期末损坏报废。如果干第一种任务时每台机器可获利润 10，干第二种任务时每台机器可获利润 7，问应如何分配使用机器以使四期的总利润最大（期末剩下的完好机器数量不限）？

五、(25 分) 求如下图所示网络的最大流（弧旁的数字表示的是（容量，流量）），并指出截集。



六、(20 分) 某修理店只有一个修理工人，来修理的顾客到达次数服从普阿松分布，平均每小时 4 人，修理时间服从负指数分布，平均需 6 分钟，求 1）修理店空闲的概率；2）店内有 3 个顾客的概率；3）店内至少有一个顾客的概率；4）在店内顾客的平均数；5）在店内平均逗留时间；6）等待服务的顾客平均数；7）平均等待修理（服务）时间。8）如果店内已有 3 个顾客，那么后来的顾客即不在排队，其他条件相同，求店内空闲的概率和店内顾客平均数。

<2004>

二、$\max z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

终表

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_1	4	1	0	2	-1
4	x_2	2	0	1	-1	1
			0	0	-2	-1

生产甲产品4单位 乙产品2单位

(2) $\left.\begin{array}{l} -2-2\Delta C \le 0 \\ -1+\Delta C \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \le \Delta C \le 1$

∴甲的单位利润的允许变动范围 $[2,4]$

(3) $\min z' = 6y_1 + 8y_2$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 3 \\ y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

(4) A、B的影子价格分别为 2, 1.

(5) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_{s_1} = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_{s_2} = 8 \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_{s_1} = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_{s_2} = 0 \end{cases} \quad ②$$

互补松弛性:即当且仅当 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ 为最优解时,

$Y_s\hat{X} = 0$　$\hat{Y}X_s = 0$

对偶问题最优解 $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ 原问题最优解 $x_1 = 4$ $x_2 = 2$

分别代入①②得 $x_{s_1} = 0$　$x_{s_2} = 0$　$y_{s_1} = 0$　$y_{s_2} = 0$

∴互补松弛性定理成立

三、设一虚拟销地 B_5

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3	5	8	4	0	30
A_2	7	4	8	6	0	50
A_3	10	3	5	2	0	60
	15	10	40	45	30	

最终表

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	15			15	
A_2		10	10		30
A_3			30	30	

最优的调运方案 A_1 运往 B_1 15,运往 B_4 15

A_2 运往 B_2 10, B_3 10.　A_3 运往 B_3 30

B_4 30

四、分4阶段 s_k 表示第k阶段初完好机器数.

x_k 表示第k阶段投入第一种任务的机器数

$f_k(s_k)$ 表示第k阶段初完好机器数为 s_k 时到第4阶段的最大利润 $c_k(x_k)$ 表示第k阶段有 x_k 台投入第一种任务的利润

……

$$\frac{2}{3}x_k + (s_k - x_k)\frac{9}{10} = s_{k+1}$$

$$c_k(x_k) = 10x_k + 7(s_k - x_k)$$

$$f_k(s_k) = \max_{0 \le x_k \le s_k} \{c_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

当 $k=4$ 时 $f_4(s_4) = \max\limits_{0 \le x_4 \le s_4} \{10x_4 + 7(s_4 - x_4) + 0\}$

$f_4(s_4) = 10s_4$　$x_4^* = s_4$

$k=3$　$f_3(s_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le s_3} \{10x_3 + 7(s_3 - x_3)$

$+ 10\left[\frac{2}{3}x_3 + (s_3 - x_3)\frac{9}{10}\right]\}$

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le s_3}\{16s_3+\frac{2}{3}x_3\}$$

$$=\frac{50}{3}s_3$$

$$x_3^*=s_3$$

$k=2$ $$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}\{10x_2+7(s_2-x_2)+\frac{50}{3}[\frac{2}{3}x_2+(s_2-x_2)\cdot\frac{9}{10}]\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\{22s_2-\frac{8}{9}x_2\}$$

$$=22s_2$$

$$x_2^*=0$$

$k=1$ $$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}\{10x_1+7(s_1-x_1)+22[\frac{2}{3}x_1+(s_1-x_1)\cdot\frac{9}{10}]\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\{\frac{134}{5}s_1-\frac{32}{15}x_1\}$$

$$=\frac{134}{5}s_1$$

$$x_1^*=0$$

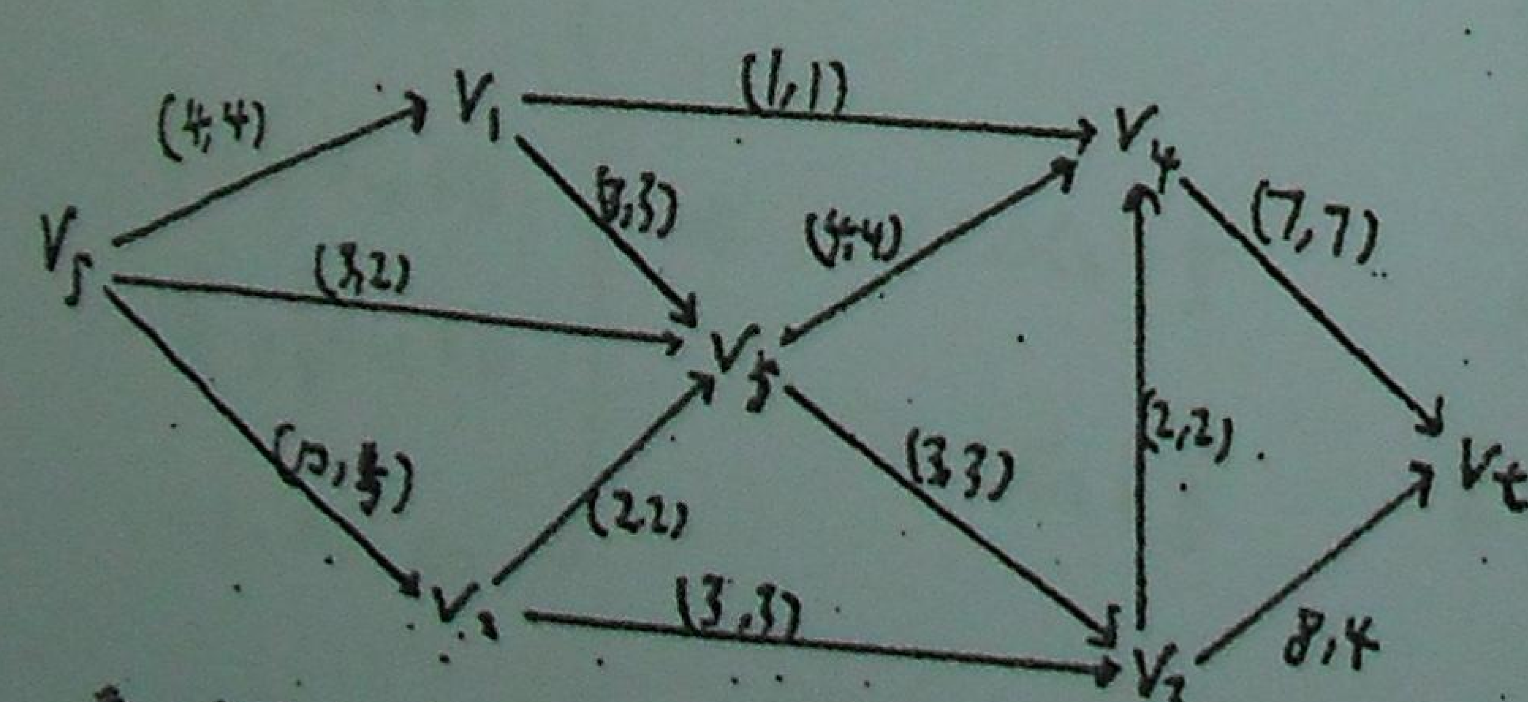
$$s_1=100$$

∴ 第一、二月期所有机器全部投入第二种任务

第三、四期全部投入第一种任务

最大利润为 2680

五



最大流为11，截集为弧集 $\widehat{v_1v_4}$、$\widehat{v_5v_4}$、$\widehat{v_5v_3}$、$\widehat{v_2v_3}$

六 $\lambda=4$ 人/小时 $\mu=10$ 人/小时 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{5}$

(1) $P_0=1-\rho=\frac{3}{5}$

(2) $P_3=(1-\rho)\cdot\rho^3=0.0336$

(3) $1-P_0=\frac{2}{5}$

(4) $L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{2}{3}$ 人

~~(5) $W_s=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{4}{15}$ 小时~~

~~(6) $L_q=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{6}$ 人~~

~~(7) $W_q=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{1}{15}$~~

(5) $W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{6}$ 小时

(6) $L_q=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{4}{15}$ 人

(7) $W_q=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{1}{15}$ 小时

(8) 系统容量有限 $N=3$

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=\frac{1-0.4}{1-0.4^4}=62.67\%$$

$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(1+N)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}=0.562\text{ 人}$$

一、(5) 设虚拟公司 A_4、A_5

公司 \ 工程	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	4	8	7	8	7
A_5	6	9	12	14	10