已对47

35,

北京交通大学2004年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：数学分析　　　　共二页　第一页

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一、 计算题：（每题7分）

（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$，　（2）求 $\left(x^x\right)^{(2)}$，　（3）求 $\int x\sin ax\cos bx dx$（其中a,b为非零常数，$a^2\neq b^2$），（4）求 $\int_1^2\sqrt{x^2-1}\,dx$，　（5）设 $u=\dfrac{x}{r^2}$，$v=\dfrac{y}{r^2}$，$w=\dfrac{z}{r^2}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$，　（6）求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间与和函数，

（7）求曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t, z=ct$，其中 a,b,c 为正的常数，$t\in(-\infty,\infty)$ 在参数为 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线与法平面方程，

（8）求第二型曲面积分 $\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，外法线是正向，

（9）求 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathrm{A})$，其中 $\mathrm{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，而且 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 对所有变量有连续的二阶偏导数（包括混合导数），

（10）将函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$ 在 x=0 处展成幂级数。

二、 证明题：

（1）根据导数定义证明 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$ 其中 a>0 为常数。（10分）

（2）证明有界闭区间[a,b]上的连续函数f(x)一定有界。（10分）

（3）尽可能详细地证明区间（a,b）上的连续函数$f(x)$在此区间上一定存在原函数。（15分）

（4）设$\varphi(x,y,z)$对所有变量有连续导数，证明其梯度方向是该函数增长最快的方向。（15分）

三、　综合题：（30分）

试证反常积分$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的收敛性，并证明该积分的值为$\frac{\pi}{2}$。