

北京交通大学 2004 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目: 量子力学

共 1 页 第 1 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分!

1. (本题 20 分) 在一维无限深势阱中, 在能量表象中 $t=0$ 时刻处于态

$$\Psi = A(\delta_{n1} + \delta_{n3}), \quad 0 < x < a.$$

(1) 计算归一化常数 A ; (2) 测量能量的可能值, 以及这些能量可能值出现的几率; (3) 计算 \bar{E} ; (4) 计算 t 时刻的概率密度函数 $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, 指出 $p(x, t)$ 的最大值和最小值.

2. (本题 10 分) 对于单个电子体系, 证明 $[\hat{L}, \hat{p}^2] = 0$.

3. (本题 20 分) 两个自旋都为 $1/2$ 的粒子, $t < 0$ 时粒子 1 处于自旋指向 z 轴正方向的状态, 粒子 2 处于自旋指向 z 轴负方向的状态. 在 $t=0$ 时刻突然加上 $a(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)$ 的相互作用哈密顿算符. 试求在 $t > 0$ 的任意时刻, 粒子 1 处于自旋指向 z 轴负方向同时粒子 2 处于自旋指向 z 轴正方向的概率.

4. (本题 5 分) 三个无相互作用的粒子占据两个不同的能态分别就玻色子和费米子写出这个三粒子系统的本征态.

5. (本题 20 分) 设体系的哈密顿为 $H = H_0 + H'$ 在 H_0 表象中有

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $a \ll 1$. (1) 用微扰理论求能级至二级修正; (2) 计算其精确能量本征值; (3) 说明(1)和(2)的关系; 求出 H 的本征态.

6. (本题 10 分) 从含时薛定谔方程出发证明连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 其中

$$\rho = |\Psi|^2, \quad \mathbf{J} = \frac{\hbar}{2\mu} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$$

7. (本题 20 分) 设一电子(自旋量子数为 $1/2$) $t < 0$ 时处于自旋沿 z 轴正方向的状态, 从 $t > 0$ 开始加上沿 x 轴方向的均匀磁场 $\mathbf{B} = (B \cos \theta, B \sin \theta, 0)$. 试求任意时刻 t 自旋朝 z 轴负方向的几率.

8. (本题 20 分) 两个自旋都为 $1/2$ 的粒子, 处于态

$$\chi = \chi_+(1)\chi(2, \theta); \quad \chi_+(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(2, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

试求这两个粒子组成的系统的总自旋分别为三重态和单态的概率.

9. (本题 10 分) 粒子处于态

$$\psi = C r e^{-r} \sqrt{\frac{4\pi}{6}} [(i-1)Y_{11} + 2Y_{10} + (i+1)Y_{1,-1}] = C(x+y+2z)e^{-r}$$

(1) 计算归一化常数 C ; (2) 指明 L^2 , L_z 和 L_x 的可能值, 这些可能值的概率以及它们的平均值. (请列表表示).

10. (本题 15 分) 单电子的轨道角动量 \mathbf{L} 和自旋角动量 \mathbf{S} 相加 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$. 在 $l=1$ 的情况下. (1) 确定总角量子数 j 和相应的磁量子数 m_j ; (2) Ψ_{j, m_j} 是耦合表象的本征态, 用无耦合表象表出态 $\Psi_{3/2, 3/2}$ (3) 求出 $\Psi_{1/2, -1/2}$ 和 $\Psi_{1/2, 1/2}$.