download.kaoyan.com

北京交通大学2004年硕士研究生入学考试试卷

科目：高等代数 共2页 第1页

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一.填空题(每小题3分,满分30分)

1、已知方程$2x^4-x^3+2x-3=0$只有一个有理根，它就是$x=$______.

2、设3阶矩阵A的3个特征值为2、3、4，则行列式$|2A|=$_______.

3、如果$f(x)=x^3-3x+k$有重根，则$k=$__________.

4、设矩阵A_1的最小多项式为f，矩阵A_2的最小多项式为g，则矩阵$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$的最小多项式为____________.

5、复数域上全体5阶反对称矩阵，关于矩阵的加法与数乘作成实数域上的线性空间，它的维数等于___________.

6、线性空间V的零变换的核空间是____________.

7、已知 $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=x, \varepsilon_3=x^2, \varepsilon_4=x^3$ 和 $\eta_1=1, \eta_2=1+x, \eta_3=(1+x)^2, \eta_4=(1+x)^3$ 是线性空间$P_4[x]$的两组基，则由基$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$到基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$的过渡矩阵是____________.

8、k阶Jordan块

$$J=\begin{bmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

的最小多项式是____________.

9、已知矩阵A的初等因子组为λ^2，$(\lambda-1)^2$，则其Jordon标准形矩阵为__________.

10、设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$是欧氏空间$V$的一组标准正交基，$\alpha$是$V$中任一向量，则$\alpha$对基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$的坐标是_______________.

二、(15分) 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & \cdots & x_{2n-3}^{n-2} \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

download.kaoyan.com

北京交通大学 2004 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：________________ 共 2 页 第 2 页

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

三、(15 分) 设 V 是由数域 P 上次数小于 n 的多项式全体构成的线性空间. a_1, $a_2, \ldots, a_n$ 是 n 个互不相同的数, $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$,

$f_i(x)=\dfrac{f(x)}{x-a_i}$, 证明 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 是 V 的一组基.

四、(15 分) 设 A 是 欧氏空间 V 的线性变换, B 是同一空间 V 的一个变换, 且对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $(\mathrm{A}\alpha, \beta)=(\alpha, \mathrm{B}\beta)$, 证明:

(1) B 是 V 的线性变换;

(2) A 的核等于 B 的值域的正交补.

五、(15 分) 设有两个线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1 \end{cases}, \qquad (2)$$

证明方程组(1)有解的充分必要条件是方程组(2)无解.

六、(15 分) 设 A, B 是 n 阶方阵, 证明 $AB-BA$ 必不相似于 kE_n, 其中 k 是非零常数.

七、(15 分) A 为 n 阶方阵,且 A 与 $A+(-1)^i iE_n$ ($i=1,2,\ldots,n-1$)均不可逆, 试讨论 A 是否相似于对角阵, 并说明理由.

八、(15 分) 设 A 是 n 阶可逆实矩阵, $B=\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$, 求 B 的正负惯性指数.

九、(15 分) 设 A 是 n 阶半正定矩阵, B 是 n 阶正定矩阵, 证明

(1) $|A+B| \geq |B|$;

(2) 上式等号成立当且仅当 $A=0$