考试科目：411 管理运筹学

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一、（40分）已知线性规划问题

$$Max \quad z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$St. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 1200 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 1000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

（1）求线性规划问题的最优解（20分）；

（2）求对偶问题的最优解（5分）；

（3）当 $\Delta b_3=-150$ 时最优基是否发生变化？为什么？（5分）；

（4）求 c_2 的灵敏度范围（5分）；

（5）如果 x_3 的系数由[1，3，5]变为[1，3，2]最优基是否改变？若改变求新的最优解(5分)。

二、（20分）

已知某运输问题其供需关系及单位运价表如下表所示：

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	4	2	5	8
A_2	3	5	3	7
A_3	1	3	2	4
销量	4	8	5	

要求：用表上作业法找出最优调运方案。

三、（20分）

某市共有6个区，每个区都可以设消防站，市政府希望设置消防站最少以便节省费用，但必须保证在城区任何地方发生火警时，消防车能在15分钟内赶到现场。据实地测定，各区之间消防车行驶时间如下表所示。建立该问题的规划模型。

各区之间的行驶时间

	一区	二区	三区	四区	五区	六区
一区	0					
二区	10	0				
三区	16	24	0			
四区	28	32	12	0		
五区	27	17	27	15	0	
六区	20	10	21	25	14	0

四、(30 分)

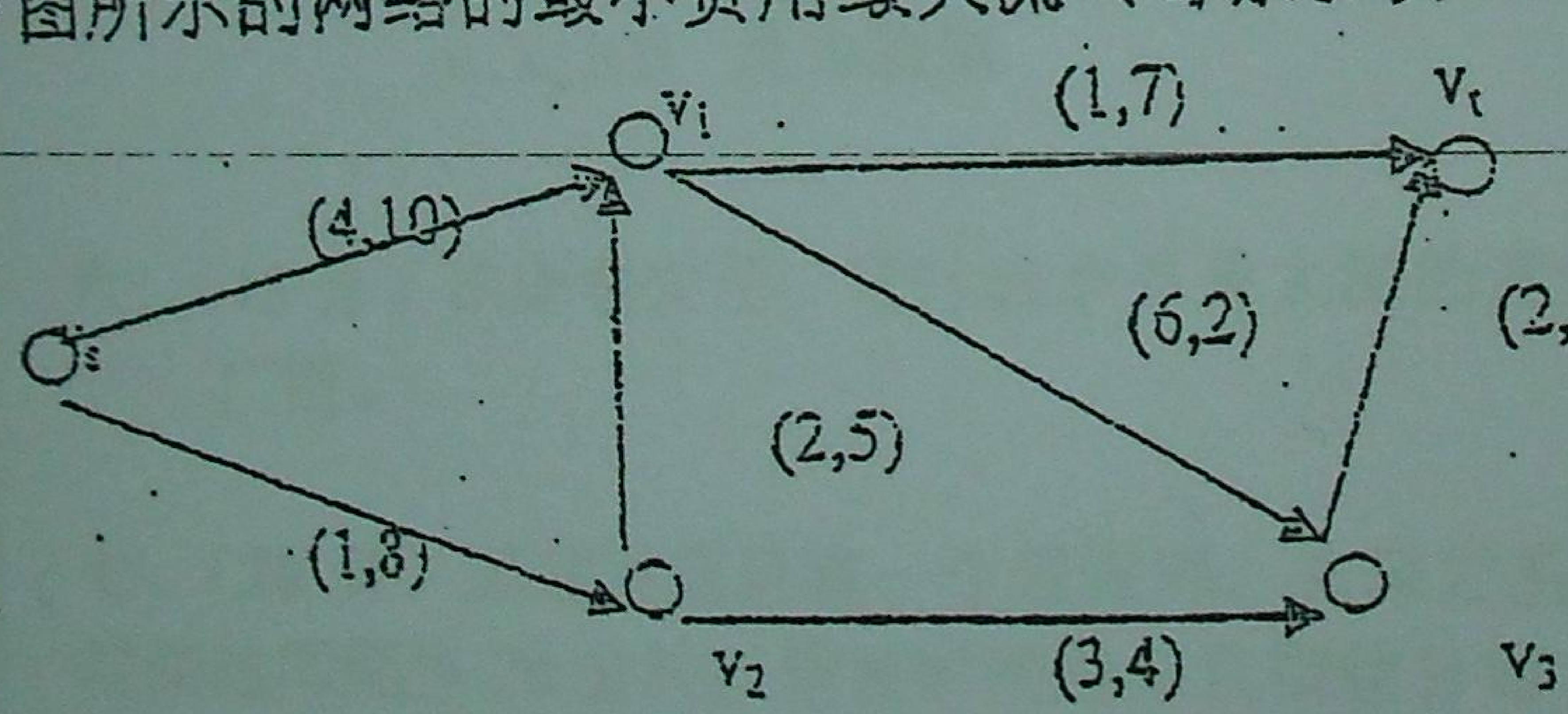
某公司有资金 10 万元，若投资于各项目(i=1,2,3)的投资额为 x_i 时，效益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1,\ g_2(x_2)=9x_2,\ g_3(x_3)=2x_3^2$$

问：如何分配投资数额才能使总效益最大？

五、(20 分)

求下图所示的网络的最小费用最大流（每条弧旁边的数字是（b_{ij},c_{ij})）



六、(20 分)

某厂拟用 1 名修理工人，已知平均送修的设备数 $\lambda=0.2$ 台/h，现有 2 种级别的工人可聘：A 级工，其工作能力为 $\mu_1=0.25$ 台/h，工资每小时 10 元；B 级工，其工作能力为 $\mu_2=0.28$ 台/h，工资每小时 20 元。因设备送修，平均每台每小时造成停工损失为 40 元。问应聘那一种工人，可使工厂的经济效益较高。

<2005>7

一(1) 终表为

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	100	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{13}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	-1
4	x_4	200	2	0	-2	1	0	1	-1
5	x_2	100	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{11}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	1
			$-\frac{13}{4}$	0	$-\frac{11}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	-1

最优解为 $(0, 100, 0, 200)$

(2)

$$3\times 100 + 2\times 200 = 800$$

$$4\times 100 + 4\times 200 = 1200$$

$$4\times 100 + 3\times 200 = 1000$$

∴ 对偶问题最优解为 $(0, \frac{1}{4}, 1)$

(3)

$$B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 150 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}(b+\Delta b) = \begin{bmatrix} 100+150 \\ 200+150 \\ 100-150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 350 \\ -50 \end{bmatrix}$$

最优基发生变化，∵ $-50<0$，需用对偶单纯形法继续运算

(4)

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{13}{4} + \tfrac{3}{4}\Delta c_2 &\le 0 \\ -\tfrac{11}{4} + \tfrac{11}{4}\Delta c_2 &\le 0 \\ -\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\Delta c_2 &\le 0 \\ -1 - \Delta c_2 &\le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad -1 \le \Delta c_2 \le \frac{1}{3}$$

$$4 \le c_2 \le \frac{16}{3}$$

(5)

$$B^{-1}P_3' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

			1	5	3	4	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	100	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	-1
4	x_4	200	2	0	[1]	1	0	1	-1
5	x_2	100	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	1
			$-\frac{13}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	-1
			1	5	3	4	0	0	0
0	x_5	150	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$
3	x_3	200	2	0	1	1	0	1	-1
5	x_2	150	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
			$-\frac{15}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$

最优解为 $(0, 150, 200, 0)$

二. 设一虚拟销地 B_4，销量为2

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	5	0	8
A_2	3	5	3	0	7
A_3	1	3	2	0	4
	4	8	5	2	

终表为

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1		8		0
A_2			5	2
A_3	4		0	

最优调运方案为 A_1 调往 B_2 8.

A_2 调往 B_3 5

A_3 调往 B_1 4

三. 设 $x_i = \begin{cases} 1 & \text{在第}i\text{区设立消防站} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

$$\mathrm{Min}\, z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \end{cases}$$

四. s_i 为投资给第 i 至第 3 项目的资金量

$f_i(s_i)$ 表示投资给第 i 项目至第 3 项目的资金为 s_i 时,第 i 项目至第 3 项目的最大收益

$$s_i - x_i = s_{i+1}$$

$$f_i(s_i) = \max_{0 \leq x_i \leq s_i} \{ g_i(x_i) + f_{i+1}(s_{i+1}) \}$$

$$f_4(s_4) = 0$$

当 $i=3$ 时 $f_3(s_3) = \max\limits_{0 \leq x_3 \leq s_3} (2x_3^2) = 2s_3^2$

$$x_3^* = s_3$$

当 $i=2$ 时 $f_2(s_2) = \max\limits_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{ 9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2 \}$

$f_2(s_2) = 9s_2 \quad x_2^* = s_2$

或 $f_2(s_2) = 2s_2^2 \quad x_2^* = 0$

$i=1$ 时

当 $f_2(s_2) = 9s_2$ 时

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1 = 10} \{ 4x_1 + 9(s_1 - x_1) \} = 9s_1 = 90$$

$$x_1^* = 0$$

当 $f_2(s_2) = 2s_2^2$ 时

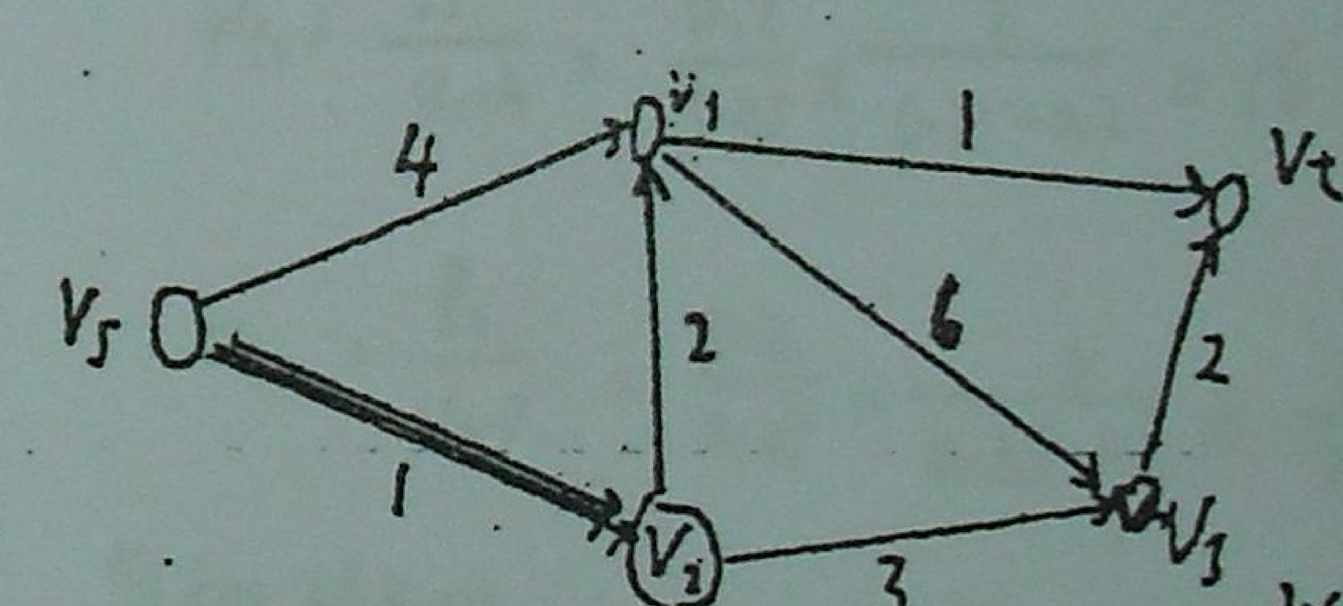
$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1 = 10} \{ 4x_1 + 2(s_1 - x_1)^2 \}$$

$f_1(s_1) = 2s_1^2 = 200 \quad x_1^* = 0$

~~故 $f_1(s_1) = 4x_1 = 40 \quad x_1^* = s_1 = 10$~~

最终方案为把10万元全部投资于第3项目,获利最大为200万元

五. 初始可行流为0, 构造其增广有向图.



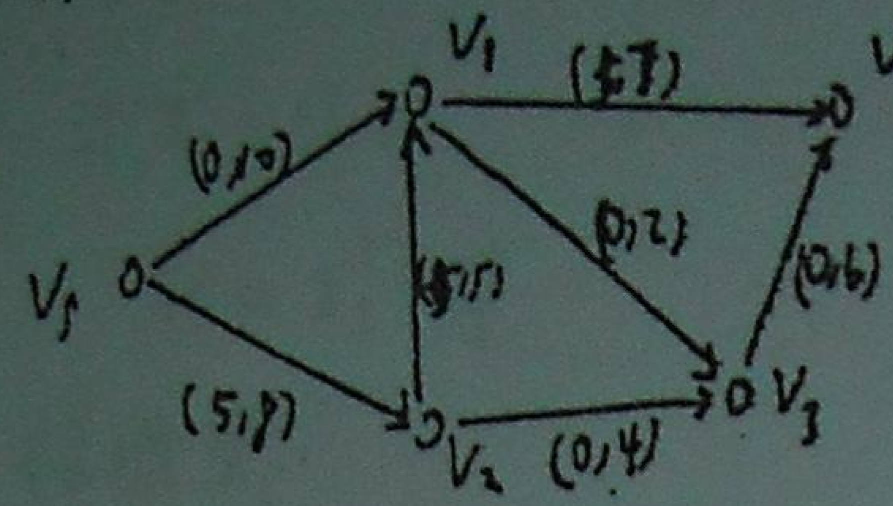
$W(f^{(0)})$

最短路为 $v_s \to v_2 \to v_1 \to v_t$ 在该图中找到最短的路为增广链 对该增广链进行调整 $\theta = \min\{ \min\limits_{u^+}(c_{ij} - f_{ij}), \min\limits_{u^-} f_{ij} \}$

$$= \min\{8, 5, 7\} = 5$$

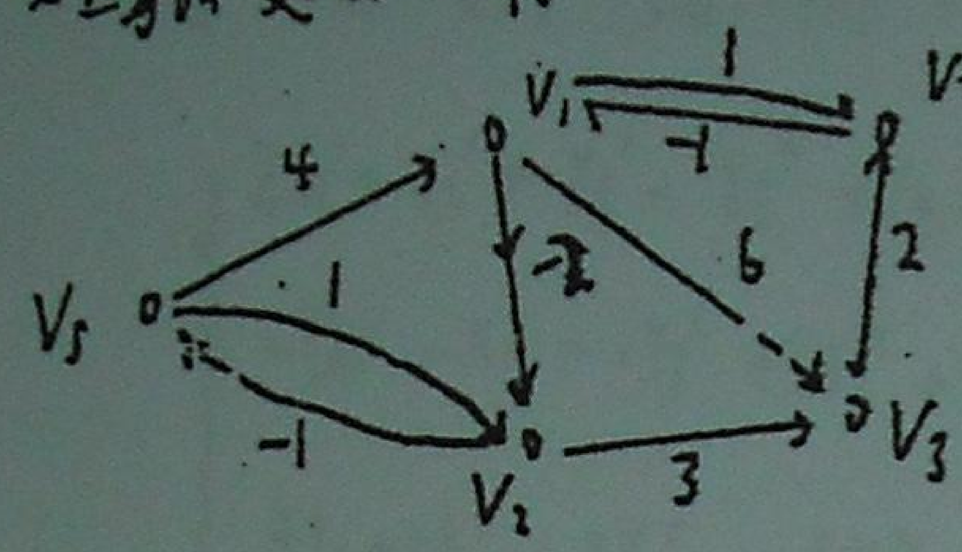
$$f_{ij}^* = \begin{cases} f_{ij} + \theta & (v_i, v_j) \in u^+ \\ f_{ij} - \theta & (v_i, v_j) \in u^- \\ f_{ij} & (v_i, v_j) \notin u \end{cases}$$

初始可行的流量图 (f_{ij}, c_{ij})

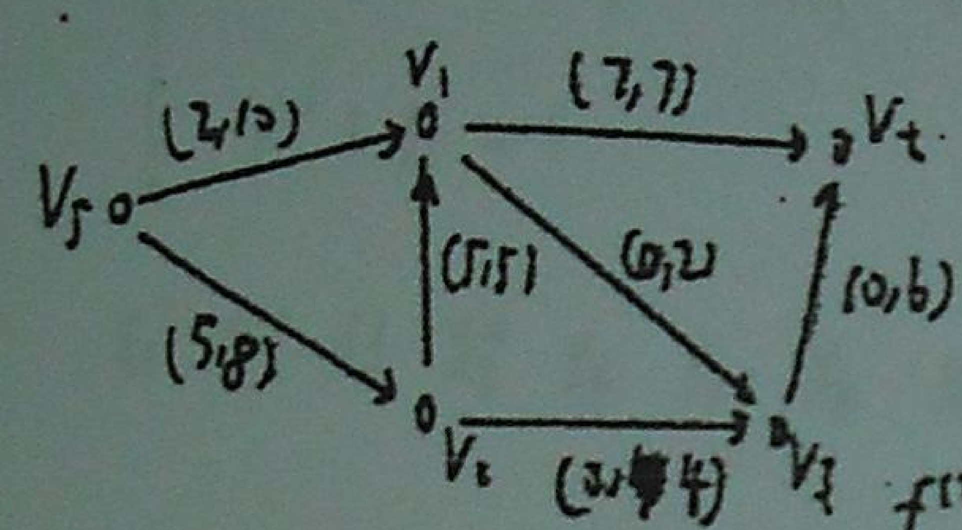


$f^{(1)}$

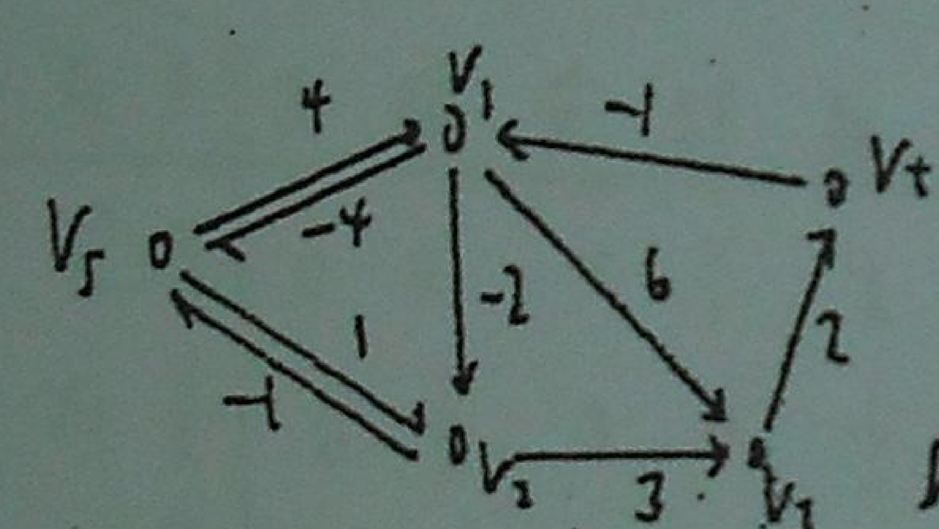
再构造此图的赋权有向图，并按照以上方法迭代进行



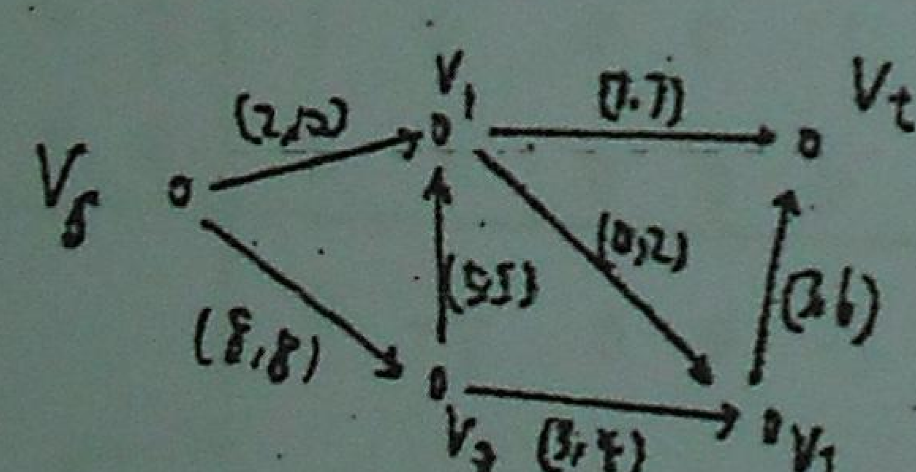
$W(f^{(1)})$



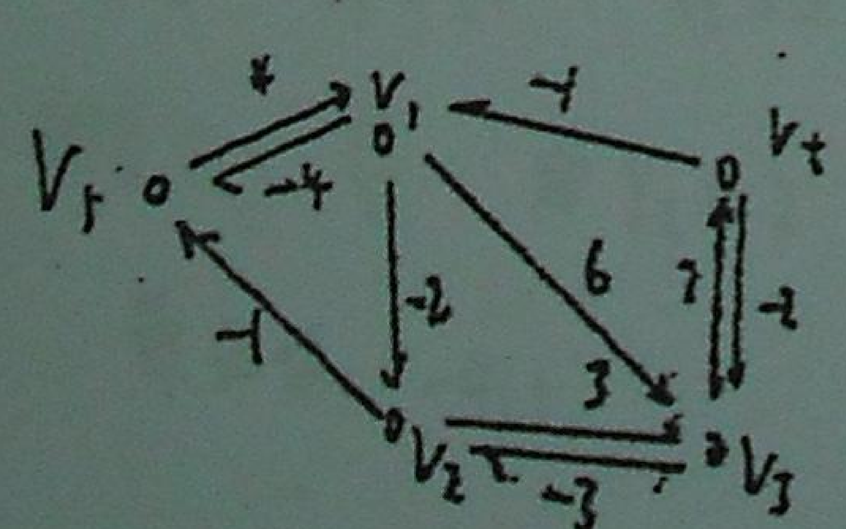
$f^{(2)}$



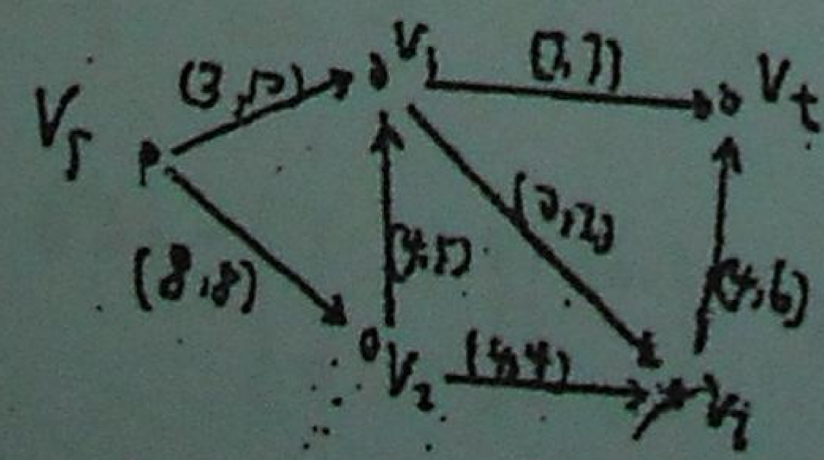
$W(f^{(2)})$



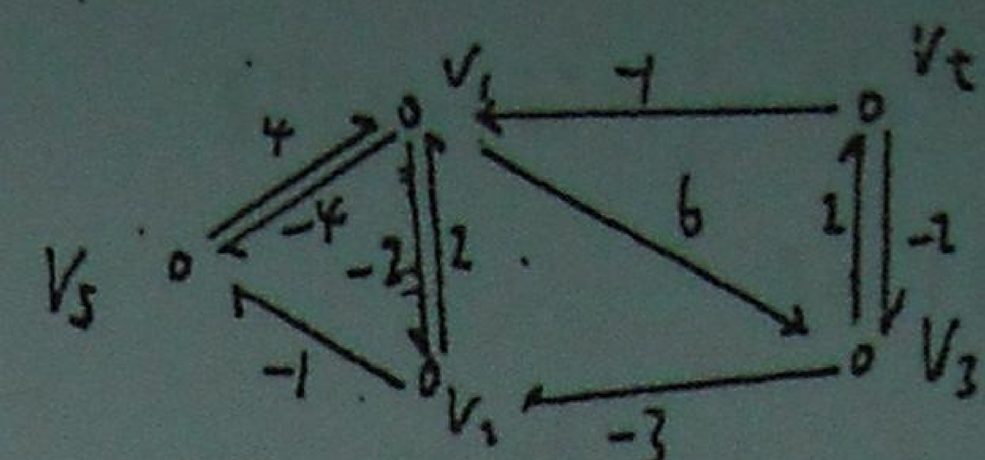
$f^{(3)}$



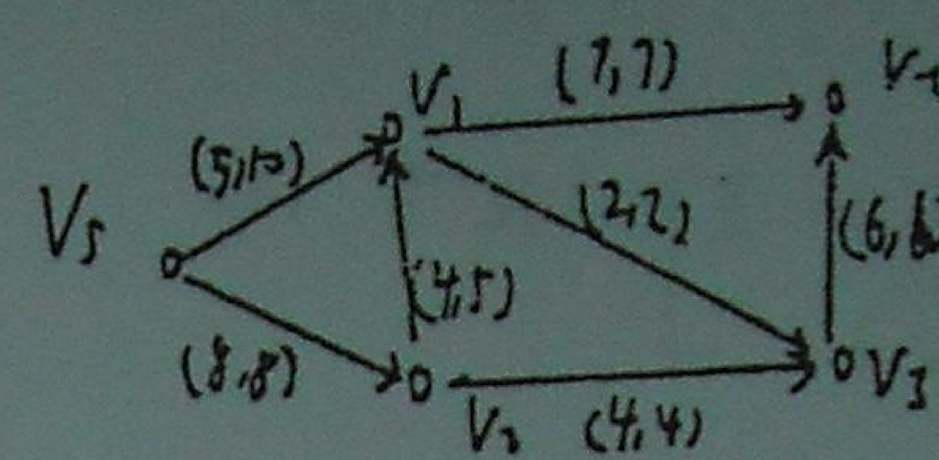
$W(f^{(3)})$



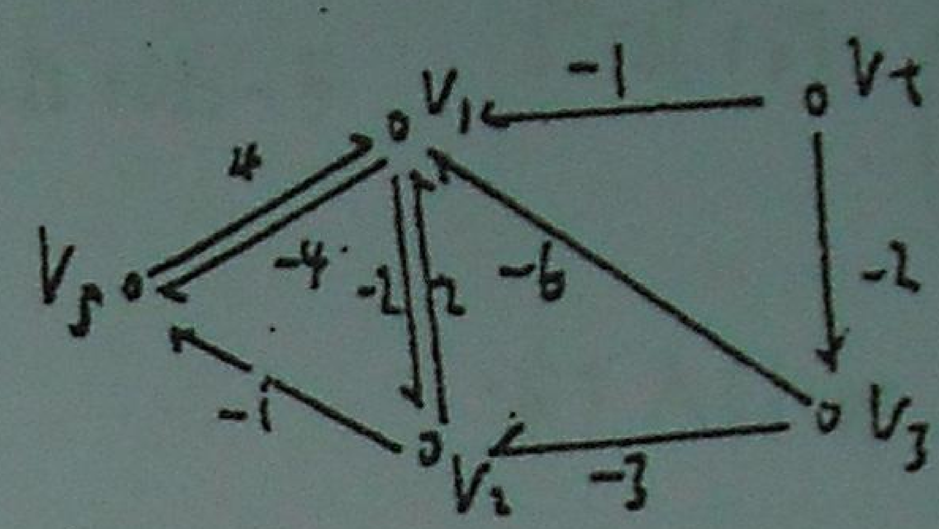
$f^{(4)}$



$W(f^{(4)})$



$f^{(5)}$



$W(f^{(5)})$

$W(f^{(5)})$ 中不再存在 $V_s \to V_t$ 的负回路

因此 $f^{(5)}$ 的流量即为最小费用最大流

六 $\lambda = 0.2$ 台/h　$\mu_1 = 0.25$ 台/h　$\mu_2 = 0.28$ 台/h

每台因修理而停工的平均时间

$$W_{s_1} = \frac{\rho_1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{0.2}{0.25} \times \frac{1}{0.25 - 0.2} = 16 \text{ 小时}$$

$$W_{s_2} = \frac{\rho_2}{\mu_2 - \lambda} = \frac{0.2}{0.28} \times \frac{1}{0.28 - 0.2} = \frac{5}{0.56} \text{ 时}$$

每小时的费用

$$\lambda_1 \cdot W_{s_1} \times 40 + 10 = 138 \text{ 元}$$

$$\lambda_2 W_{s_2} \times 40 + 20 = 91.5 \text{ 元}$$

应聘B技工，工厂的效益较高