

北京交通大学 2005 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目: 312 数学分析

共 2 页 第 1 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分!

一. (本题满分 25 分)

用一致连续的定义证明: (1) 函数 $f(x) = x^2$ 在有限区间 (a, b) ($a < b$ 都是实数) 内一致连续; (2) 函数 $f(x) = x^2$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 内非一致连续.

二. (本题满分 25 分)

(1) 计算定积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$.

三. (本题满分 25 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有二阶导函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 并且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $|f''(x)| \leq 1$. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

四. (本题满分 25 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续的导函数, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{y+2} f\left(\frac{x+1}{y+2}\right) + 3xy^2 + e^z \right) dydz \\ + \left(\frac{1}{x+1} f\left(\frac{x+1}{y+2}\right) + 3x^2y - y \right) dzdx + (z - x^2 - y^2) dxdy.$$

其中曲面 Σ 的方程为 $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq z \leq 2$), 取外侧.

北京交通大学 2005 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目: 312 数学分析

共 2 页 第 2 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分!

五. (本题满分 25 分)

设 $\{f_n(x)\}$ 是连续函数序列, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无零点, 证明: 当 n 充分大时, 函数 $f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上也无零点.

(2) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{f_n(x)}$ 在区间 $[a, b]$ 上也一致收敛于函数 $\frac{1}{f(x)}$.

六. (本题满分 25 分)

设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 函数 $u = f(r)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有连续的二阶导函数, 而且在 $r = 0$ 的右侧小邻域内 $u = f(r)$ 有界, 又设 $f(r)$ 满足

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = \ln r.$$

求当 $r > 0$ 时的 $f(r)$.