北京交通大学 2005 年硕士研究生入学考试试卷

试科目：高等代数 444　　　　共 3 页　第 1 页

意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一.填空题（每小题 3 分,满分 30 分）

1、设p是素数,则多项式x^p+px+p和x^2+p的最大公因式为____.

2、设 3 次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$，$r\neq 0$，则以该方程的根的倒数为根的 3 次方程为________.

3、设 n 阶行列式 D 的值为 c，若将 D 的每个元素 a_{ij} 换成 $b^{i-j}a_{ij}$ $(b\neq 0)$，则所得行列式的值为________.

4、设 A 是 3 阶矩阵，行列式$|A+E_3|=0$, $|A+2E_3|=0$, $|A+3E_3|=0$，则行列式 $|A+4E_3|=$ ________.

5、设 B, C 为 n 阶方阵，B^*, C^*分别为它们的伴随矩阵，则分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵 $A^*=$ ____________.

6、若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$$

有解，则常数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足的条件是____________.

7、设线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 定义为 $\mathcal{A}(x, y, z)=(x+y+z, 0, 0)$，则 $\mathcal{A}$ 在基$\alpha_1=(1, 0, 0)$, $\alpha_2=(1, 1, 0)$, $\alpha_3=(1, 1, 1)$下的矩阵是________.

8、设λ_1, λ_2是 3 阶实对称矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为$\alpha_1=(1, 1, 3)^T$, $\alpha_2=(4, 5, a)^T$，则实常数 $a=$ ____.

9、设实二次型 $f(x, y, z)=x^2+2xy+ky^2+k^2z^2$ 是正定二次型，则参数 k 应满足的条件是__________.

10、设 3 维欧氏空间中一组基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的度量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

则向量$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$的长度$|\beta|$为________.

北京交通大学2005年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数 444

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

二、(15 分) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x^n & (x+1)^n & (x+2)^n & \cdots & (x+n)^n \\ x^{n-1} & (x+1)^{n-1} & (x+2)^{n-1} & \cdots & (x+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x+1 & x+2 & \cdots & x+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (x>0)$$

三、(10 分) 设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

求 A 中所有元素的代数余子式之和.

四、(15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases},$$

的一个基础解系为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$，求方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0 \\ \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解.

五、(15 分) 设二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，证明：

(1) 若 $|A|<0$，则 A 可相似于对角矩阵；

(2) 若 b 与 c 同号，则 A 可相似于对角矩阵；

(3) 若 $|A|<0$，且 $AB=BA$，则 B 可相似于对角矩阵.

北京交通大学2005年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：高等代数 444

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

六、(15分) 设 A 为 n 阶方阵，$g(x)$是 A 的最小多项式，$f(x)$ 是次数大于零的任一多项式. 证明方阵 $f(A)$可逆的充分必要条件是$f(x)$与 $g(x)$互素.

七、(15分) 设 A, B 都是正定矩阵，证明：

(1) 方程 $|\lambda A - B| = 0$ 的根全大于零；

(2) 方程 $|\lambda A - B| = 0$ 的所有根都等于 1 当且仅当 $A = B$.

八、(15分) 设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上一个线性空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 V 的一组基，又设

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \qquad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4;$$
$$\beta_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \qquad \beta_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4.$$

令

$$W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2), \qquad W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$$

(1) 求 $W_1 + W_2$，并求 $W_1 + W_2$ 的维数和一组基；

(2) 求 $W_1 \cap W_2$，并求 $W_1 \cap W_2$ 的维数和一组基.

九、(20分) 设α 是 n 维欧氏空间 V 中的非零向量，定义变换如下：

$$\mathcal{A}(x) = x + k(x, \alpha)\alpha \qquad (\forall x \in V)$$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是线性变换；

(2) 设α 在 V 的一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$，求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵；

(3) 证明 $\mathcal{A}$ 是对称变换；

(4) 证明 $\mathcal{A}$ 是正交变换的充分必要条件是$k = -\dfrac{2}{(\alpha,\alpha)}$.