(13)

北京交通大学2006年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：417 管理运筹学

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一、(25 分)设有如下的线性规划问题：

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0, 2 \le x_2 \le 6, x_3\text{自由变量} \end{cases}$$

（1）写出该线性规划的标准型；（10 分）

（2）求原规划的最优解和最优目标函数值。（15 分）

二、(25 分)标准型线性规划问题（$\min Z = CX, AX = b, X \ge 0$）的最优单纯形表为：

C_j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$B^{-1}b$
C_B	x_b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_1	x_1	1	0	-1	3	-1	1
c_2	x_2	0	1	2	-1	1	2
σ_j		0	0	3	3	1	8

其中：x_4，x_5是对应于初始单位矩阵的松弛变量。试求：

（1）求该标准型线性规划目标函数的系数 $c_1 - c_5$；

（2）设该标准型线性规划的右端常数项为 b，$\Delta b_1, \Delta b_2$ 分别为 b 的两个分量的增量，试分别对两个增量进行灵敏度分析，即求出 $\Delta b_1, \Delta b_2$ 分别变化时的取值范围；

（3）假定用 $b + \lambda\Delta b$ 代替 b，其中 $\Delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$-\infty < \lambda < +\infty$，要使现行的最优基 B^* 不变，求 λ 的变化范围，并求当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时的最优解；

（4）要使现行的最优基不变，求目标函数系数 c_1 变化范围；

（5）求两个约束的影子价格。

三、（25 分）某工厂安排某种生活必需品在以后四个月的生产计划。该产品可以在以后四个月的任一个月生产，不过受用工和原料价格的影响，不同的月份其生产成本不同，该产品在以后

北京交通大学 2006 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：417 管理运筹学

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

四个月的生产成本分别是 12、10、15、18 元/件。该产品以后四个月需要量分别是 400、700、900 和 800 件。考虑到生活必需品的要求，产品需要量必须加以满足。该工厂平常每月最多能生产 700 件，但在第二个月农闲时期工厂可以聘用临时工加班，加班后可增产 300 件，但生产成本每件增加 3 元。过剩产品每件存储费用是每月 3 元。试完成：

（1）仿照运输问题建立使总成本最小的生产计划线性规划数学模型；（10 分）

（2）用运输问题表上作业法求解。（10 分）

（3）理论上讲该问题有几个最优基本可行解？（5 分）

四、（25 分）某城市公共交通公司共有公交客车 1000 辆，可投入超负荷和正常负荷两种状态运营。如果当年投入高负荷状态运营，年运量为 20 万人/台，且第一年投入高负荷运营时汽车年完好率为 0.8，以后各年投入高负荷运营时每年完好率随车龄每年以 0.1 递减。如果投入正常负荷状态运营，年运量为 15 万人/台，第一年汽车年完好率为 0.95，以后各年投入正常负荷运营时每年完好率随车龄以 0.05 递减。试安排 5 年运量最大的运营方案。

五、（15 分）用割平面法求解下列 IP 问题：

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{st.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{且为整数} \end{aligned}$$

六、（15 分）试证明定理：可行流 f^* 是最大流的充分必要条件是不存在关于 f^* 的增广链。

七、（20 分）某理发店只有一个理发师，来理发的顾客到达过程为 Poisson 流，平均到达间隔为 20 分钟，理发时间服从负指数分布，平均需要 15 分钟，试求：

（1）理发店空闲的概率

（2）店内恰有 3 个顾客的概率

（3）店内至少有 1 个顾客的概率

（4）在店内的平均顾客数

（5）每位顾客在店内的平均逗留时间

（6）等待服务的平均顾客数

（7）每位顾客平均等待时间

（8）顾客在店内逗留超过 10 分钟的概率

<2006>

一、设 $x_1' = -x_1 \geq 0$　$x_2' = x_2 - 2 \geq 0$ 且 $x_2' \leq 4$

$x_3 = x_3' - x_3''$

标准型：

~~$\text{Max } Z' = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 \pm$~~

$\text{Max } Z' = x_1' - 2x_2' - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 + 0x_7 - 4$

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2' + x_3' - x_3'' + x_4 = 7 \\ -3x_1' - x_2' - x_3' + 2x_3'' + x_5 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2' + 3x_3' - 3x_3'' + x_6 = 2 \\ x_2' + x_7 = 4 \end{cases}$$

$x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_3''\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7 \geq 0$

终表.

C_B	X_B	b	x_1'	x_2'	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_3''	12	0	0	-1	1	2	0	-1	0
0	x_5	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	x_1'	$\frac{19}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_7	4	0	1	0	0	0	0	0	1
			0	$-\frac{5}{2}$	0	0	-7	0	$-M+\frac{7}{2}$	0

$x_1' = \frac{19}{2}$　$x_3'' = 12$　$x_2' = 0$　$x_3' = 0$

∴解为 $x_1 = -\frac{19}{2}$，$x_2 = 2$　$x_3 = -12$

最优值：-41.5

二、(1) $C_1 = -2$　$C_2 = -3$　$C_3 = -1$　$C_4 = 0$　$C_5 = 0$

(2) $B^{-1}\Delta b_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$B^{-1}(\Delta b_1 + b) = \begin{bmatrix} 3\Delta b_1 + 1 \\ -\Delta b_1 + 2 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{3} \leq \Delta b_1 \leq 2$

06(1)

$B^{-1}(\Delta b_2 + b) = \begin{bmatrix} -\Delta b_2 + 1 \\ \Delta b_2 + 2 \end{bmatrix}$

$-2 \leq \Delta b_2 \leq 1$

(3) $B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\lambda \\ -2\lambda \end{bmatrix}$

$B^{-1}(\Delta b + b) = \begin{pmatrix} 1 + 4\lambda \\ 2 - 2\lambda \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{4} \leq \lambda \leq 1$ 时最优基不变

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，$B^{-1}(\Delta b + b) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴最优解为 $x_1 = 3$　$x_2 = 1$　$x_3 = 0$

(4) $\begin{cases} 3 + \Delta C_1 \geq 0 \\ 3 - 3\Delta C_1 \geq 0 \\ 1 + \Delta C_1 \geq 0 \end{cases}$　$-1 \leq \Delta C_1 \leq 1$

C_1 的变化范围：$-3 \leq \Delta C_1 \leq -1$

(5) 影子价格 $(-3, -1)$

三、

产＼需	一	二	三	四	零	b_i
一	12	15	18	21	0	700
二	M	10	13	16	0	700
三	M	M	15	18	0	700
四	M	M	M	18	0	700
加	M	13	16	19	0	300
a_j	400	700	900	800	300	

$\text{Min } Z = C_{ij} x_{ij}$

$$\begin{cases} \sum_j^5 x_{ij} \leq b_i \\ \sum_i^5 x_{ij} = a_j \end{cases}$$

(2)

	一	二	三	四	needs
一	400				300
二		700	0		
三			700		
四				700	
加			200	100	0

(3) 无穷多个

四. 逆推法

$x_k[0.8-(k-1)\times0.1]+(s_k-x_k)[0.95-(k-1)0.05]=s_{k+1}$

$f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\{20x_k+15(s_k-x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$

$k=1,2\cdots5$

$f_6(s_6)=0$

当 $k=5$ 时

$f_5(s_5)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\{20x_5+15(s_5-x_5)\}=20s_5$

$x_5^*=s_5$

$k=4$

$s_5=x_4\cdot0.5+(s_4-x_4)\cdot0.8=0.8s_4-0.3x_4$

$f_4(s_4)=\max\limits_{0\le x_4\le s_4}\{20x_4+15(s_4-x_4)+20(0.8s_4-0.3x_4)\}$

$=31s_4\qquad x_4^*=0$

$k=3\quad s_4=0.85s_3-0.25x_3$

$f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}\{20x_3+15(s_3-x_3)+31(0.85s_3-0.25x_3)\}$

$=41.35s_3\qquad x_3^*=0$

$k=2$

$s_3=0.9s_2-0.2x_2$

$f_2(s_2)=\max\{20x_2+15(s_2-x_2)+41.35(0.9s_2-0.2x_2)\}$

$=52.215s_2\qquad x_2^*=0$

$k=1\quad s_2=0.95s_1-0.15x_1$

$f_1(s_1)=\max\{64.60425s_1$

$x_1^*=0$

∴五年最大的运营方案是1,2,3.4年低负荷运营，第五年高负荷运营

五

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
8	x_1	6	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	x_4	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
			0	-7	-4	0

已经是整数解了但我还是又用割平面法做了一遍

六 见书：P274

06(2)

t. $\lambda = 3$ 人/小时　$\mu = 4$ 人/小时

(1) $P_0 = 1-\rho = 0.25$

(2) $P_3 = (1-\rho)\rho^3 = \frac{27}{256}$

(3) $1-P_0 = 0.75$

(4) $L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 3$ 人

(5) $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1$ 小时

(6) $L_q = \frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{9}{4}$ 人

(7) $W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{3}{4}$ 小时

(8) 顾客在店内逗留时间服从 $\mu-\lambda$ 的负指数分布

$$x = f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P\{x > \tfrac{1}{6}\} = \int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-\frac{1}{6}}$$