北京交通大学2006年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：444 高等代数

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一、选择题（每题3分，共15分）

1. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times4}, B=(b_{ij})_{4\times4}$，且 $a_{ij}=-2b_{ij}$，则行列式 $|B|=$______

(A) $2^{-4}|A|$； (B) $2^{4}|A|$； (C) $-2^{-4}|A|$； (D) $-2^{4}|A|$

2. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，已知伴随矩阵 A^* 的秩为1，则必有____

(A) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$； (B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$；

(C) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$； (D) $a=b$ 或 $a+2b=0$

3. 设 α 是 n 维非零实列向量，矩阵 $A=E+\alpha\alpha^T$，$n\geq3$，则______

(A) A 至少有 $n-1$ 个特征值为1； (B) A 恰有 $n-1$ 个特征值为1；

(C) A 只有1个特征值为1； (D) A 没有1个特征值为1

4. 设 A,B 为 n 阶方阵，且 $r(A)=r(B)$，则______

(A) $r(A-B)=0$； (B) $r(A+B)=2r(A)$；

(C) $r(A,B)=2r(A)$； (D) $r(A,B)\leq r(A)+r(B)$

5. 已知解向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，以下解向量组中，也是 $Ax=0$ 的基础解系的是______

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$；

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

二、填空题（每题3分，共15分）

1. 设4阶方阵 A 和 B 的伴随矩阵为 A^* 和 B^*，且它们的秩为 $r(A)=3, r(B)=4$，则秩 $r(A^*B^*)=$__________；

北京交通大学 2006 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：444 高等代数

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

2. 设 n 阶向量 $\alpha=(x,0,\cdots,0,x)^T$，$x<0$；矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，且

$$A^{-1}=E+\frac{1}{x}\alpha\alpha^T，则 x=\underline{\qquad\qquad};$$

3. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则实常数 a 的取值范围为____________；

4. $2n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=$____________，其中 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ b & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，而 $n\geq 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$______

三、计算题(每题 12 分，共 72 分)

1. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

2. 求矩阵 X 使 $AX+BA^{-1}-A^{-1}BX=0$，其中，$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 设非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1 \\ x_1-2x_2+b_3x_3+b_4x_4=d_2 \\ c_1x_1+c_2x_2+2x_3-3x_4=d_3 \end{cases}$ 有三个解向量

$$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求此方程组系数矩阵的秩，并求其通解(其中 a_i,b_j,c_k,d_l 为已知常数).

北京交通大学 2006 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目： 444 高等代数 共 3 页 第 3 页

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

4. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_2x_3$ $(\lambda>0)$ 经过正交变换 $X=QY$，化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求实参数 λ 及正交矩阵 Q.

5. 设线性方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=b \end{cases}$，问 a，b 各取何值时，线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解.

6. 设 R^3 中的列向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，R^3 上的线性变换为

$$\Phi(\alpha)=(-2x_2-2x_3,-2x_1+3x_2-x_3,-2x_1-x_2+3x_3)^T,$$

（1）（8 分）求 R^3 的一个基，使 Φ 在该基下的矩阵为对角矩阵；

（2）（4 分）求线性变换 Φ 的秩和零度.

四、证明题(每题 12 分，共 48 分)

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是欧氏空间 V 的标准正交基，证明：

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)\quad \beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)\quad \beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$

也是 V 的标准正交基.

2. 设 $f=X^TAX$ 是 n 元实二次型，有 n 维实列向量 X_1,X_2，使 $X_1^TAX_1>0$，$X_2^TAX_2<0$，证明：存在 n 维列实向量 $X_0\neq0$，使 $X_0^TAX_0=0$

3. 证明：数域 F 上的一个 n 次多项式 $f(x)$ 能被它的导数整除的充分和必要条件是 $f(x)=a(x-b)^n$，这里 a,b 是数域 F 中的数.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧式空间 V 的一个标准正交组. 证明，对任意 $\xi\in V$，

下面不等式成立：$\sum_{i=1}^{m}(\xi,\alpha_i)^2\leq|\xi|^2$.