1027 2本

北京交通大学2007年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：607 数学分析

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

一、（本题满分 25 分）

设数列$\{a_n\}$满足条件：存在正数M，使得对一切n，有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + |a_4 - a_3| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \le M,$$

证明：(1) 数列$\{A_n\}$收敛；(2) 数列$\{a_n\}$收敛.

二、（本题满分 25 分）

试用 Taylor 公式证明：设函数$f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续，在开区间$(a,\ b)$内二阶可导，则存在$\xi \in (a,\ b)$，使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

三、（本题满分 25 分）

设$J(m,\ n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$，（$m$，$n$为正整数）.

(1) 证明：$J(m,\ n) = J(n,\ m)$.

(2) 证明：$J(m,\ n) = \dfrac{n-1}{m+n} J(m,\ n-2) = \dfrac{m-1}{m+n} J(m-2,\ n)$.

(3) 求$J(2m,\ 2n)$.

四、（本题满分 25 分）

设函数$f(x)$在开区间$(a,\ b+1)$内有连续的一阶导函数$(a<b)$，令

$$f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right], \qquad (x \in (a,\ b)).$$

证明：(1) 函数列$\{f_n(x)\}$在$(a,\ b)$上内闭一致收敛于$f'(x)$. (2) 对任意的闭区间$[\alpha,\ \beta] \subset (a,\ b)$，有$\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x) dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：607 数学分析

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

五、（本题满分 25 分）

设函数 $z=z(x,\ y)$ 在二维平面 $\mathbf{R}^2$ 上有连续的一阶偏导数，$w=w(u,\ v)$ 是由方程组

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad z=e^{w+x+y}$$

所确定的隐函数. 试将方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,\qquad (x\neq y).$$

化为 $\dfrac{\partial w}{\partial u}$，$\dfrac{\partial w}{\partial v}$ 所满足的一个关系式.

六、（本题满分 25 分）

计算曲面积分

$$\oiint_S \frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy,$$

其中 S 为长方体

$$V=\{(x,\ y,\ z):\ |x|\le 2,\ |y|\le 3,\ |z|\le 4\}$$

的表面并取外侧，$r=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$.