北京航空航天大学

二００二年硕士生试题 题单号：493

《高等代数》 （共3页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参加阅卷）。

一. 填空题（本题满分10分，每小题2分）

1）设矩阵：$A_{m\times m}$ ，$B_{n\times n}$，$|A|=a$，$|B|=b$ 则 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=$ ____________

2）实数域 R 上全体形如 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}$ 的二阶矩阵对矩阵的加法和数乘运算所构成的线性空间的基底为 ____________

3）设三维线性空间 V 上的线性变换 A 在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

则 A 在 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 ____________ （k 不为零）

4）设一个 λ 矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 此矩阵若当标准形 ____________

5） 设 V 为 n 维欧氏空间，$V_1=\{x|(x,\alpha)=0,\alpha\in V,\forall x\in V\}$，则 V_1 的维数为 ______

二、 选择题（本题满分10分，每小题2分）

1）$A_{n\times n}$ 且可逆，则 ____________

$A)\ |A^*| = |A|^{n-1}$ $B)\ |A^*| = |A|$ $C)\ |A| = |A|^n$ $D)\ A^* = |A^{-1}|$

2）$A_{n\times n}$，秩（A）$=n-3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为非齐次线性代数方程组 AX=b 的三个线性无关的解，则 ______ 为 AX=0 的基础解系

$A)\ \alpha_1+\alpha_2\ ,\alpha_2+\alpha_3\ ,\alpha_3+\alpha_1$ $B)\ \alpha_1-\alpha_2\ ,\alpha_2-\alpha_3\ ,\alpha_3-\alpha_1$

$C)\ \alpha_1-2\alpha_2\ ,4\alpha_2-\alpha_3\ ,\alpha_3-\alpha_1$ $D)\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ ,\alpha_3-\alpha_2\ ,-\alpha_1-2\alpha_3$

3）设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 A 的一特征值，则矩阵 $\left[\left(\frac{1}{3}\right)A^2\right]^{-1}$ 的特征值为 ______

A）$\frac{4}{3}$ B）$\frac{3}{4}$ C）$\frac{1}{2}$ D）$\frac{1}{4}$

4）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n =$ ______

A）零矩阵 B）A C）2A D）3A

5）$V_1,V_2,\dots\dots V_S$ 为 n 维线性空间 V 的子空间，$V_1+V_2+V_3+\dots\dots+V_S$ 为直和的充要条件 ______

A）维（$V_1+V_2+V_3+\dots\dots+V_S$）$=\sum\limits_{i=1}^{s}$ 维 V_i

B）$\sum\limits_{i=1}^{s}$ 维 V_i=n

C）$V=V_1+V_2+V_3+\dots\dots+V_S$

D）$V_1\cap V_2\cap\dots\dots\cap V_S=\{0\}$

三、 （本题满分 10 分）

证明当且仅当(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1 时有 (f(x),g(x)h(x))=1

四、 （本题满分 10 分）

求下面的行列式的值

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & x_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & x_n-m \end{vmatrix}$$

五、 （本题满分 10 分）

设非齐次方程组 $AX=b$ 的特解 η_0，它对应的齐次线性代数方程组 AX=0 的基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-r}$，且秩（A）$=r$，证明：

$\eta_0,\eta_1=\eta_0+\alpha_1,\eta_2=\eta_0+\alpha_2,\dots\dots\eta_{n-r}=\eta_0+\alpha_{n-r}$ 为 $AX=b$ 线性无关的解向量，若 $\eta=k_0\eta_0+k_1\eta_1+\dots\dots+k_{n-r}\eta_{n-r}$ 且 $k_0+k_1+\dots\dots+k_{n-r}=1$，则 η 为 $AX=b$ 的全部解向量

六、 （本题满分 10 分）

已知 $\alpha=(1,1,-1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & -b & -2\end{pmatrix}$ 的特征向量，确定参数 a,b 以及特征向量 α 所对应的特征值。

七、 （本题满分 10 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots\alpha_{n-1}$ 为 n 维欧氏空间 V 的线性无关的向量，β_1,β_2 均和 $\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots\alpha_{n-1}$ 正交，证明 β_1,β_2 线性相关。

八、 （本题满分 10 分）

$V=\left\{X\,\middle|\,X=(x_{ij})_{n\times n},\sum_{i=1}^{n}x_{ii}=0,x_{ij}\in R,i,j=1,2,\dots\dots n\right\}$，求 V 的基底和维数。

九、 （本题满分 10 分）

A 为 n 阶正定矩阵，E 为单位矩阵，证明 $|A+2E|>2^n$

十、 （本题满分 10 分）

设 A 为 n 阶方阵，且秩（A）=r，$A^2=A$，证明 A 的对角线元素之和为 r