北京航空航天大学
2003 年硕士试题 题单号：493
高等代数 （共 3 页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、（本题 10 分）

设行列式$|a_{ij}|_{n\times n}$中对任意 i . j 有$a_{ij}=-a_{ji}$，且 n 为奇数，证明$|a_{ij}|_{n\times n}=0$。

二、（本题 10 分）

设 A，B 均为 n 阶方阵，证明 $AB-BA\neq I_n$.此处 I_n 为 n 阶单位阵。

三、（本题 10 分）

设 h(x) ,f(x) ,g(x)均为域 F 上的一元多项式，若 h(x)|f(x) ,而 h(x)不整除 g(x)，证明 h(x)不整除 f(x)+g(x) 。

四、（本题 10 分）

若向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$也线性无关。

五、（本题 10 分）

设 W_1 ,W_2 是线性空间 V 的子空间，若 $W_1 \cup W_2$ 也是 V 的子空间，证明必有 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$ 。

六、（本题 10 分）

设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，证明 σ 可逆的充分必要条件为 σ 是单的（即 σ 是 1-1 的）。

七、（本题 15 分）

设 A，B，C，D 为 $n\times n$ 阶矩阵，且 $|A| \neq 0$，AC=CA，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB| 。$$

八、（本题 15 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，求正交阵 T 使 $T'AT$ 为对角阵。

九、（本题 15 分）

设 A 为 n 阶正定矩阵的充分必要条件是存在一个非奇异矩阵 C，使得 A=$C'C$。

十、（本题 15 分）

设 A，B 都是 n 阶实矩阵，秩 A$\leq\frac{n}{2}$，秩 B$\leq\frac{n}{2}$，证明对任意实数 a，行列式 $|A+aB|=0$。

十一、（本题 15 分）

设 $q(x_1,x_2,\dots,x_n)$是数域 F 上一个二次型，A 是这个二次型的矩阵，$\lambda\in F$ 是 A 的一个特征根，证明存在不全为零的数 $c_1,c_2,\dots,c_n\in F$ 使 $q(c_1,c_2,\dots,c_n)=\lambda(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2)$。

十二、（本题 15 分）

设 A 是有限维线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，AW 表示由 W 中向量的象组成的子空间，证明：维（AW）+维（$A^{-1}(0)\cap W$）=维（W）。