北京航空航天大学

二00四年硕士试题 题单号：493

高等代数 （共3页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）

1. （本题10分）

计算下面行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots\cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n+\lambda \end{vmatrix}$$

2. （本题10分）

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，如果存在一个素数 p，使得

1) p 不能整除 a_n

2) $p|a_{n-1},a_{n-2},\ldots a_0$

3) p^2 不能整除 a_0

则此多项式在有理数域上是不可约的

3. （本题10分）

设向量组 $\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m & (1)\\ \beta_1,\beta_2,\ldots\beta_m & (2)\\ \gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_m & (3)\end{matrix}$ 的秩分别为 s_1,s_2,s_3，其中

$\gamma_i = \alpha_i - \beta_i \quad i = 1,2,\ldots m$

证明：$s_1 \le s_2 + s_3 \quad s_2 \le s_1 + s_3 \quad s_3 \le s_1 + s_2$

4. （本题 20 分）

讨论a,b取什么值时，下面方程有解，并求解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

5. （本题 10 分）

设 A 和 B 分别是$m \times n, n \times s$矩阵，证明若 A 的秩为n，则秩（AB）=秩 B

6. （本题 10 分）

设 A，B 分别是数域 P 上的$m \times p$ ，$p \times n$矩阵，设$W = \{B\alpha | AB\alpha = 0\}$，

证明：维 W=秩 B-秩 AB

7. （本题 10 分）

设 A 是n阶矩阵且$A^2 = A$，证明数域 P 上的n维线性空间P^n可以分解为

线性方程组$AX = 0$及$(A-E)X = 0$各自解空间的直和。

8. （本题 10 分）

设λ_1, λ_2是线性变换 T 的两个不同的特征值，$\varepsilon_1, \varepsilon_2$分别是属于$\lambda_1, \lambda_2$的特征向量，证明$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$不是 T 的特征向量。

9. （本题 10 分）

设 T 是n维线性空间 V 的一个线性变换，λ_0是 T 的一个特征值，V_{λ_0}是 T

的关于特征值λ_0的特征子空间，证明：V_{λ_0}的维数$\le\lambda_0$的重数。

10. （本题10分）

求下面λ-矩阵的不变因子

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0\cdots\cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0\cdots\cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda\cdots\cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$$

11. （本题10分）

设A是欧氏空间V的一个变换，证明 ：如果$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)\quad\forall\alpha,\beta\in V$，

则A是V上的正交变换。

12. （本题20分）

已知$A=\begin{bmatrix}13 & 14 & 4\\ 14 & 24 & 18\\ 4 & 24 & 29\end{bmatrix}$求满足关系$X^2=A$的实对称矩阵X

13. （本题10分）

设A是n阶非奇异矩阵，证明存在正交矩阵Q_1,Q_2，使得

$$Q_1AQ_2=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\quad 其中\ a_i>0\quad i=1,2,\ldots n$$